

## *Análisis de una serie histórica: determinación de componentes y formulación de modelos interpretativos*

---

### INTRODUCCIÓN

En la mayor parte de los trabajos que se realizan para delimitar los elementos fundamentales de una serie histórica reflejo de un hecho económico y estudiar sus fluctuaciones, suelen partir de una genérica clasificación de sus componentes para después, mediante métodos más o menos refinados, aislar cada una de ellas. Este modo de proceder puede dar lugar, como veremos más adelante, a errores bastante sensibles, a la vez que se transcurran aspectos importantes contenidos en la serie.

El objeto del presente trabajo es intentar una aproximación a una metodología que pretende superar en parte esas dificultades, a la vez que los resultados que se obtienen de su aplicación sirven de información indispensable para determinar modelos interpretativos de las series en estudio. Para llevarlo a cabo, se comienza con una sucinta exposición metodológica que posteriormente se aplica al índice general de precios al por mayor de productos agrícolas en el período de tiempo comprendido entre 1959 y 1971.

### I. ANÁLISIS CLÁSICO DE UNA SERIE HISTÓRICA

El análisis de una serie histórica a través del método que llamaremos clásico, en contraposición a las más recientes aportaciones de la literatura estadística, se basa fundamentalmente en la observación directa de la serie de valores para obtener de ellos una primera información y, luego, aislar las diversas componentes que la definen:

Un análisis de las series cronológicas permite afirmar que la mayoría de ellas muestran diferentes clases de variaciones que podemos agrupar en los cuatro grupos siguientes:

— Variaciones que representan cierta tendencia general —tendencia de desarrollo— o simplemente tendencia.

\* Del Departamento de Economía Agraria del C.S.I.C.

- Fluctuaciones cíclicas o de la situación económica que, aproximadamente, corresponden a los ciclos económicos generales.
- Fluctuaciones estacionales, recurrentes periódicamente en ciertas épocas de cada año o mes.
- Fluctuaciones irregulares o aleatorias, que son el resultado de un gran número de causas aleatorias y difíciles de analizar.<sup>1</sup>

Gráficamente estas diversas componentes, según la hipótesis de actividad, se pueden representar del siguiente modo (gráfico 1):

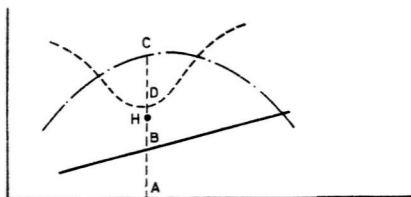


FIG. 1

$$AH = AB + BH + CD + DH = D(t) = T(t) + C(t) + E(t) + r(t)$$

En donde:

$T(t)$  Tendencia.

$C(t)$  Ciclicidad.

$E(t)$  Estacionalidad.

$r(t)$  Componente aleatoria.

El análisis de cada una de estas componentes puede ser llevado a cabo por diversos métodos de uso bastante común.<sup>2</sup>

En el esquema propuesto, para analizar las componentes de una serie histórica, algunos autores dudan de la posible separación entre la tendencia y el ciclo, bien por motivos puramente económicos, bien por causas metodológicas, ya que al poseer una serie necesariamente limitada de datos en el tiempo, resulta difícil establecer una separación neta entre la longitud del período correspondiente a la tendencia (que indicaría algo así como la evolución «natural» del fenómeno estudiado) y las longitudes correspondientes a los movimientos cíclicos, ya que «nada, en línea teórica, impide considerar aquello que hemos llamado Trend (Tendencia) de la serie —que es un trend en el finito— como el inicio de un ciclo de período más largo.<sup>3</sup> En definitiva, aceptando como válida esta crítica y llamando «componente ciclo-tendencia» a la suma de ambos efectos, la serie histórica  $X_t$  puede ser descompuesta en los siguientes elementos:

$$X_t = X_{1t} + X_{2t} + \epsilon_t$$

1. Oskar LANGE, *Introducción a la Econometría*, FCE, 1964, pp. 22-23.

2. Véase, por ejemplo, José Luis SÁNCHEZ CRESPO, *Estadística descriptiva*, INE, Madrid, 1961, pp. 124-153.

3. F. CARLUCCI, *Elementi di Analisi Spetrale*, Istituto di Calcolo delle probabilità, Roma, 1971, pp. 82 s.

En donde  $X_t$  es el valor observado,  $X_{1t}$  la componente ciclo-tendencia,  $X_{2t}$  la componente estacional y  $\varepsilon_t$  la componente aleatoria.<sup>4</sup>

Prácticamente todos los métodos que se utilizan para aislar las diversas componentes en la serie histórica o para «depurarla» de una de sus componentes y centrar luego nuestra atención en las restantes, se basan en la aplicación de transformaciones lineales en los valores. Vamos a ver, en un caso general, a los errores que esto puede inducir y luego lo estudiaremos en el caso de aplicar una media móvil que es, posiblemente, el método de uso más común.<sup>5</sup>

Llamando  $T$  al operador «Transformación» que se aplica a la serie en su conjunto, se obtiene que

$$TX = TX_1 + TX_2 + T\varepsilon$$

Y suponiendo que el método aplicado sea perfecto para aislar la tendencia, es decir, en el caso en que  $TX_2$  interprete perfectamente la componente  $X_{2t}$ , tendremos que la serie «residuo» será

$$\begin{aligned} X_t - (TX)_t &= X_{1t} + X_{2t} + \varepsilon_t - (TX_1)_t - (TX_2)_t - (T\varepsilon)_t = \\ &= X_{2t} - (TX_2)_t + \varepsilon_t - (T\varepsilon)_t \end{aligned}$$

Como se ve, la serie residuo ha sido deformada en sus dos componentes:

a) En la componente cíclica el elemento  $(TX_2)_t$  perturbará, en general disminuyendo el valor al introducirse ciclicidades de signo contrario.

b) En la componente aleatoria alterando su valor y, normalmente introduciendo correlaciones seriales, aspecto éste muy importante y que puede dificultar notablemente el análisis.<sup>6</sup>

Uno de los métodos más usados para la eliminación y análisis de las diversas componentes es el de medios móviles. Veamos, pues, en el esquema general anterior, las consecuencias de aplicar dicho método:

Llamando  $m$  al número de elementos de la serie  $X_t$  que intervienen en la operación  $T$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} a) \quad X'_{2t} &= X_{2t} - \frac{1}{m} \sum_{-1/2 m}^{+1/2 m} X_{2(t+i)} \\ b) \quad \varepsilon_t &= \varepsilon_t - \frac{1}{m} \sum_{-1/2 m}^{+1/2 m} \varepsilon_{t+i} \end{aligned}$$

4. Este análisis puede ser aplicado también en la hipótesis de multiplicatividad, como enseña el cálculo logarítmico.

5. Una exposición más detallada de lo que sigue se puede encontrar en D. MARAVALL, *Ingeniería de las oscilaciones*, Dossat, Madrid, 1959, pp. 50-58.

6. La correlación serial presenta serios inconvenientes, sobre todo en el análisis de la regresión. Véase, en general, A. GOLDBERGER, *Econometric Analysis* y, en particular E. MALINVAUD, *Serial Correlation in Econometric Analysis*, Centro di Specializzazione e ricerche economico-agrarie, Portici, 1969.

Vemos pues que, incluso sin considerar los posibles efectos perturbadores que puedan derivarse en la introducción de falsas ciclicidades negativas —efecto derivado de  $a$ )—, el término  $\varepsilon'_t$  se encuentra disminuido (e incluso puede llegar a ser anulado). En consecuencia, la eliminación de la tendencia en el caso mejor (es decir, en el caso en que la transformación interprete exactamente dicha componente), la «suavidad» de la componente estacional que resulta no deriva de la bondad del método sino de la disminución e incluso anulación de la componente aleatoria, consecuencia ésta que no estaba prevista en el método.

Como consecuencia de lo anteriormente expuesto, resultan de difícil aplicación, manteniendo un mínimo de rigor, los métodos más arriba reseñados, por lo que pasamos a estudiar una serie histórica desde otro punto de vista: como realización de un proceso estocástico.

## II. ANÁLISIS DE UNA SERIE HISTÓRICA COMO REALIZACIÓN DE UN PROCESO ESTOCÁSTICO

### 1. Consideraciones generales

Anteriormente nos hemos ocupado de los diversos métodos propuestos para analizar una serie histórica con una visión, pudiéramos decir, determinística. En el presente apartado nos ocuparemos del análisis de la serie como realización de un proceso estocástico, es decir, dando toda su importancia a la componente aleatoria.

Para ello, y a modo de introducción, daremos una serie de definiciones e intentaremos una clasificación de las series históricas que ayudarán a centrar el objeto de estudio.

Una serie histórica se puede definir como un conjunto de observaciones sobre un fenómeno dado, ordenadas cronológicamente. Dicho concepto en lenguaje analítico puede ser representado como  $(X_t; t \in T)$ .<sup>7</sup>

El conjunto  $T$  puede estar constituido por números enteros —en cuyo caso la serie histórica será de tipo discreto—, o por números reales —con lo que la serie será de tipo continuo—.

Los valores de la serie pueden ser generados determinísticamente (entre ellos es posible establecer relaciones analíticas exactas) o de forma casual (los datos que la componen son parte de la realización de un proceso estocástico).

El concepto de ciclicidad se puede presentar tanto en series generadas de una forma determinística como en aquellas series que hemos llamado alea-

7. En estas definiciones se ha sacrificado voluntariamente algo de rigor científico con vistas a una mayor claridad. Rigurosamente se debería comenzar por definir conceptos tales como «Categoría de pruebas», «Función Aleatoria» y «Proceso estocástico». Dichos conceptos se tratan ampliamente en los ya clásicos textos de DOBB, *Stochastic Processes*, J. Wiley, 1953, y BARTLETT, M. S., *An introduction to stochastic processes*, Cambridge University Press, 1961, que, en opinión del autor son de particular interés entre la enorme literatura que sobre el tema existe.



torias. Una serie histórica determinística simple se dice que se repite cíclicamente en el tiempo si es posible establecer entre sus valores relaciones del tipo  $X_t = X_{t+T}$  para cualquier  $t$  comprendida en el espacio de definición.<sup>8</sup> Una serie histórica aleatoria se repite cíclicamente cuando el proceso estocástico que la ha generado es estacionario, es decir, si

$$E(X_t) = \mu$$

$$E(X_t - \mu)(X_{t+\tau} - \mu) = \begin{cases} \gamma(0) < +\infty & \text{si } \tau = 0 \\ \gamma(\tau) & \end{cases}$$

Para cualquier  $\tau$ .<sup>9</sup>

Para una clara diferenciación entre ambos tipos de series llamaremos a las de origen determinístico que cumplen la condición más arriba indicada, periódicas y a las que han sido generadas de forma aleatoria, estacionarias.

En la definición de un proceso estocástico estacionario existe un importante problema de orden práctico: ¿cómo se puede determinar el valor de la media y de la varianza de dicho proceso si únicamente se conoce una parte de una realización (la serie histórica considerada)? Para resolver este problema se hace necesaria una nueva división de las series hasta ahora estudiadas en ergódicas y no ergódicas.<sup>10</sup> Serán series ergódicas en media y varianza las que tengan como estimadores consistentes de ambos parámetros la media temporal y la varianza temporal, es decir,

$$\bar{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum X_{ti}$$

$$\bar{\gamma}_N(\tau) = \frac{1}{N} \sum [(X_{ti+\tau} - \mu)(X_{ti} - \mu)]$$

Gran número de series históricas, sobre todo las relacionadas con problemas económicos, no presentan las características necesarias que permitan in-

8. El análisis de Fourier permite un estudio satisfactorio de las series determinísticas con reproducción cíclica. Una exposición completa de dicho tipo de análisis se encuentra en G. A. CAMPBELL y R. M. FOSTER, *Fourier Integrals for practical applications*, Van Nostrand, Nueva York, 1952.

9. El concepto de estacionariedad indicado se entiende en «sentido débil». Rigurosamente (en sentido fuerte) se dice que un proceso estocástico es estacionario —partiendo de la definición de Slutsky de proceso estocástico— si la función de distribución multidimensional relativa a un número finito de elementos es tal que

$$F(t_1, t_2, \dots, t_n, \bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_n) = F(t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau; \bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)$$

Este concepto está ampliamente discutido en M. GRASSINI, *Rappresentazione di un processo stocastico nel campo delle frequenze*, Universidad de Nápoles, 1968.

10. Una definición precisa de los teoremas ergódicos y su aplicación al análisis de las series históricas se encuentra en la obra citada en la nota anterior. Un tratamiento más superficial en F. CARLUCCI, *Elementi di Analisi Spettrale*, Istituto di Calcolo delle probabilità, Roma, 1971.

cluir las en el grupo de series estacionarias debido a la existencia de una «tendencia de fondo» en la serie que provoca una no constancia de la media en el tiempo, o un crecimiento —o decrecimiento— en la varianza o a una autocovarianza que no sea independiente del parámetro  $t$ . Algunas de estas dificultades son de posible superación mediante el uso de filtros lineales en la serie que producirán un output que cumplirá las condiciones de estacionalidad.<sup>11</sup> Según esto, los procesos estocásticos no estacionarios se clasifican a su vez en evolutivos y no evolutivos y, lógicamente, las series históricas derivadas de ellos se llamarán, por igual razón, evolutivas y no evolutivas.

Para el problema que nos ocupa —análisis de series históricas económicas—, de esta amplia clasificación que hemos expuesto, son las series estacionarias y las evolutivas las que mayor interés presentan. En ellas, pues, nos centraremos en el futuro.

Resumiendo los resultados hasta ahora obtenidos se puede elaborar el siguiente cuadro clasificatorio:

## 2. Función de autocorrelación y función de densidad espectral de un proceso estocástico<sup>12</sup>

Dado un proceso estocástico  $(X_t; -\infty \leq t \leq +\infty)$  —o simplemente  $X(t)$ — se define como coeficiente de autocovarianza entre dos valores de la serie a la expresión  $\gamma(st) = E\{[X_s - \mu(s)][X_t - \mu(t)]\}$ . Igualmente se define como coeficiente de varianza para un valor de la serie a la expresión  $\sigma^2(t) = E\{[X(t) - \mu(t)]^2\}$ . El coeficiente de autocorrelación entre dos valores es el cociente de las expresiones anteriores, es decir,

$$\rho(t, s) = \frac{\gamma(ts)}{\sqrt{\sigma^2(t) \cdot \sigma^2(s)}}$$

Recordando las condiciones de estacionariedad en media, varianza y covarianza de un proceso estocástico, resulta que dicho coeficiente depende únicamente de la distancia —o separación— existente entre los dos valores, cualquiera que sea su posición relativa dentro de la serie. Dicha correspondencia

11. Más adelante se verá con mayor detalle el concepto de filtro lineal; baste aquí definir dicho concepto como un conjunto de operadores que, aplicados a un proceso estocástico  $X_t$ , reproducen un nuevo proceso  $Y_t$ . Aplicando determinados filtros lineales —que gozan de ciertas propiedades— a algunos procesos estocásticos, se obtienen nuevos procesos que son estocásticos estacionarios. Aquellos procesos estocásticos originales se definen como evolutivos.

12. El análisis de una serie histórica en su aspecto temporal se puede llevar a cabo analizando la autocorrelación o la autocovarianza. La preferencia del primer tipo de análisis se basa en que el coeficiente de autocorrelación es independiente de la unidad de medida, dada la forma en que se obtiene, lo que permite una mayor facilidad interpretativa entre diversos gráficos. Por otra parte, el paso de uno a otro coeficiente es inmediato. Un análisis basado en la autocovarianza se encuentra en L. VAJANI, *Le serie temporali: Moderni orientamenti*, Milán, 1963.

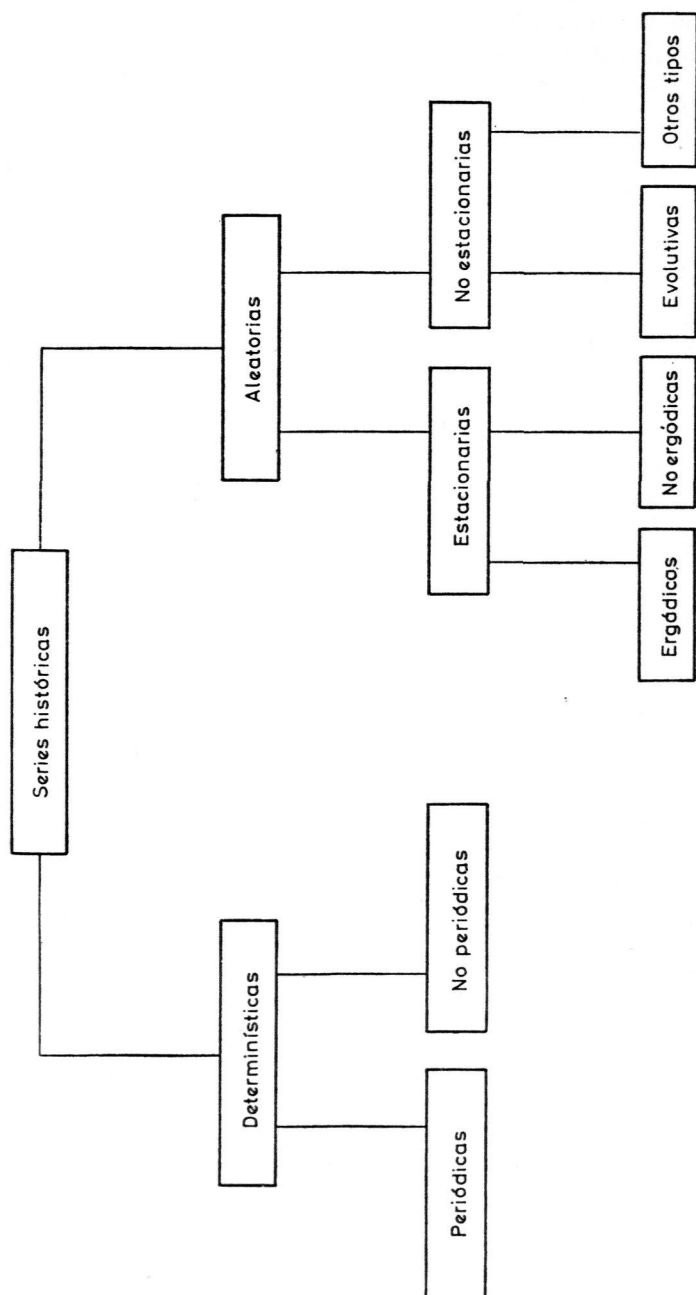


Fig. 2

biunívoca entre ambos valores permite definir la función de autocorrelación en un proceso estocástico estacionario como

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}^{13}$$

Su representación gráfica recibe el nombre de correlograma de proceso estocástico.

Si la línea teórica la función de autocorrelación es capaz de «informar» sobre la dependencia existente, en el orden temporal, entre distintos valores dentro del proceso, en la práctica, contando únicamente con la serie histórica, las dificultades de estimación y construcción de intervalos de aceptabilidad son notables.<sup>14</sup>

Por otra parte, una vez estimada la función, surge el problema de la biunivocidad entre el proceso estocástico y la función de autocorrelación; se demuestra teóricamente que «dada la función de autocorrelación  $\rho(\tau)$  existe uno y sólo un proceso estocástico estacionario e invertible que posee a  $\rho(\tau)$  como propia función de autocorrelación».<sup>15</sup>

De todos los estimadores propuestos, el de uso más generalizado —siguiendo a Box-Jenkins— es:

$$\bar{\rho}(\tau) = \frac{\sum X(t) X(t + \tau)}{\sum X^2(t)}$$

Suponiendo el proceso con media nula, es decir:

$$X(t) = X_1(t) - \frac{1}{N} \sum X_1(t)$$

donde  $X_1(t)$  es el valor de la serie original. Como se indicaba más arriba, el test de la hipótesis clásica no puede ser aplicado, de todas formas Bartlett<sup>61</sup> da un valor aproximado de la varianza con la expresión

13. Un análisis detenido de la Función de Autocorrelación, sus propiedades y dificultades de estimación se encuentra en: G. E. BOX y G. M. JENKINS, *The time series analysis: forecasting and control*, Holden-Day, 1970; A. RIZZI, *Introduzione all'analisi della autocorrelazione*, Roma, 1971; G. S. FISHMAN, *Spectral Methods in econometrics*, Harvard University Press, 1969. El primero de los libros citados se extiende en los diversos tipos de estimadores propuestos, lo que le hace particularmente interesante.

14. De señalar son las limitaciones derivadas del carácter no paramétrico de los estimadores obtenidos, y, por tanto, la imposibilidad del estudio dentro del cuadro general del test de hipótesis clásico.

15. Más adelante se volverá sobre el concepto de invertibilidad. En términos de probabilidad dicho teorema se puede expresar de la siguiente forma: dados dos procesos estocásticos estacionarios e invertibles  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  que presentan idéntica función de autocorrelación  $\rho(\tau)$

$$\text{Prob} \{X_1(t) = X_2(t)\} = 1 \quad \forall t$$

Una demostración de este teorema se encuentra en la obra de FISHMAN citada en la nota 13.

16. M. S. BARTLETT, «On the theoretical specification of sampling properties of autocorrelated time series», *Journal Royal Stat. Soc.*, 1956.

$$\text{Var } \bar{\rho}(\tau) \simeq \frac{1}{N} [1 + 2 \sum_{\nu=1}^q \rho^2(\nu)]$$

para valores de  $\tau$  superiores a  $q$ . Igualmente

$$\text{Var } \{\bar{\rho}(\tau)\} \simeq \frac{1}{N}$$

cuando  $\tau$  toma todos los valores, como se deduce inmediatamente de la condición de estacionariedad.

Una importante consideración de orden teórico cabe hacer respecto a los valores estimados: dichos valores presentan, como es lógico, una fuerte autocorrelación entre sí, lo que dificulta notablemente la capacidad explicativa del valor que toma la función para un determinado lag; de aquí se deduce que las consecuencias que se obtengan del análisis de la autocorrelación deberán referirse al comportamiento general de la función y sólo de una manera provisional a los valores que tome en puntos determinados. Este aspecto individual puede ser profundizado realizando el estudio en el campo frecuencial, es decir, con el análisis de la densidad espectral.<sup>17</sup> Dicho tipo de análisis permite aislar las frecuencias —es decir, los períodos— que explican la mayor parte de la varianza total del proceso.<sup>18</sup>

En el caso de procesos estocásticos estacionarios reales, la función de densidad espectral se determina como

$$g(\lambda) = \frac{1}{\tau\pi} [\gamma(0) + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} \gamma(\tau) \cos \tau\lambda]$$

Dicha función, sus propiedades e importancia explicativa para el análisis de las series históricas era ya conocida desde hace bastante tiempo, pero sólo recientemente se ha aplicado en la práctica. Los primeros intentos de cuantificación se hicieron calculando el valor estimado de la función de densidad espectral como la transformada de Fourier de la función de autocovarianza, estimada según se ha indicado más arriba. Teóricamente se demuestra que el periodograma (representación gráfica de la función de densidad espec-

17. La función de densidad espectral es, en un proceso estocástico estacionario, la transformada de Fourier de la función de autocovarianza de dicho proceso. Una exposición detallada de cuanto sigue se encuentra en los ya citados libros de G. S. FISHMAN y BOX y JENKINS (nota 13), F. CARLUCCI (nota 10) y JENKINS, G. M., y WATTS, *Spectral Analysis and its applications*, Holden Day, 1969.

18. Se demuestra la existencia de una función  $G(\lambda)$ , llamada función de distribución espectral, que es similar en su forma a la función de distribución de probabilidad. Dicha función es tal que  $G(\lambda) = \sum_{\nu: \nu < \lambda} \sigma_{\nu}^2$ ; varía entre  $-\pi$  y  $\pi$  y el valor que toma para  $\lambda = \pi$  es el de la varianza del proceso, es decir,  $G(\pi) = \gamma(0)$ . De la función de distribución espectral se deriva la función de densidad espectral.

tral estimada) así obtenido no es consistente y que, por tanto, sus valores no son aceptables.

Sólo recientemente se han superado en parte estas dificultades, sobre todo con los trabajos de Bartlett,<sup>19</sup> que más tarde perfeccionan Parzen<sup>20</sup> y Tukey.<sup>21</sup> Bartlett determina estimadores de la función de densidad espectral, que gozan de la propiedad asintótica de la consistencia, dividiendo las series en subseries de longitud  $M$ , calculando el periodograma de éstas y considerando una media ponderada suya como estimador. Unido al valor así obtenido y dependiente del valor fijado para  $M$ , se define la  $b_M(\tau)$  llamada «ventana de intervalo» (*lag window*) de tal forma que el estimador calculado por Bartlett asume el valor

$$\bar{g}_M(\lambda) = \frac{1}{\tau\pi} [\gamma(0) + 2 \sum_{\tau=1}^M b_M(\tau) \cdot \bar{\gamma}(\tau) \cos \tau\lambda]$$

donde  $b_M(\tau)$  toma los valores

$$\left(1 - \frac{|\tau|}{M}\right) \quad \text{si } |\tau| < M$$

y

$$b_M(\tau) = 0 \quad \text{si } |\tau| > M$$

Tukey y Parzen perfeccionan el trabajo de Bartlett calculando «ventanas de intervalo» con valores

Parzen

$$b_M(\tau) = \begin{cases} 1 \cdot 6 \left(\frac{|\tau|}{M}\right)^2 + 6 \left(\frac{|\tau|}{M}\right)^3 & \text{si } |\tau| \leq \frac{M}{2} \\ 2 \left(1 - \frac{|\tau|}{M}\right)^3 & \text{si } \frac{M}{\tau} < |\tau| \leq M \\ 0 & \text{si } |\tau| > M \end{cases}$$

Tukey

$$b_M(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi\tau}{M}\right) & \text{si } |\tau| \leq M \\ 0 & \text{si } |\tau| > M \end{cases}$$

19. BARTLETT, M. S., «Periodogram analysis and continuans spectra», *Biometrika*, núm. 37, 1950.

20. PARZEN, E., «On asymptotically, efficient, estimates of the spectral density function of stationary time series», *Journal of Royal Stat. Soc.*, serie B, núm. 20, 1958.

21. TUKEY, J. M., «Discussion emphasizing the connection between analysis of variance and spectral», *Technometrics*, núm. 3, 1961.

Igualmente se demuestra que la expresión

$$\frac{\nu \bar{g}_M(\lambda)}{\xi(\lambda)}$$

se distribuye como una variable aleatoria  $\chi^2$  con  $\nu$  grados de libertad, que son para las diversas ventanas los siguientes:

V. de Bartlett	3. N/M
V. de Parzen	3,71 N/M
V. de Tukey	2,67 N/M

Estos conceptos dan un criterio para hacer un test de hipótesis: fijado un cierto  $\alpha$ , el intervalo

$$\left[ \frac{\nu \cdot \bar{g}_M(\lambda)}{\chi^2_{\nu}(1 - \alpha/2)} ; \frac{\nu \bar{g}_M(\lambda)}{\chi^2_{\nu}(\alpha/2)} \right]$$

Será un intervalo de confianza al  $\alpha$  por ciento de la función estimada  $\bar{g}(\lambda)$ .

### III. DETERMINACIÓN DE MODELOS INTERPRETATIVOS - PARA LAS SERIES HISTÓRICAS

En apartados anteriores se han analizado una serie de técnicas que permiten llegar a un conocimiento más profundo de las diversas componentes de una serie histórica y, sobre todo, que hacen evidentes diversos aspectos de ellas que no son observables mediante un análisis inmediato. Así, hemos visto que es posible aislar y dar una valoración relativa de las componentes ciclo-Trend (frecuencias bajas), así como de aquellas otras que presentan «picos» marcados para frecuencias superiores y que pueden ser identificadas como variaciones estacionales, o quizá, como consecuencias de oscilaciones provocadas por ajustes de mercado a corto plazo, si la serie en análisis es de precios.

Llegando al punto en que se conocen las componentes fundamentales de la serie, surge la idea de expresar mediante modelos analíticos de fácil comprensión la compleja realidad que ha generado la serie.

El objeto de tal tipo puede orientarse bien a prever qué «va a suceder» en base a lo que «ha sucedido» —modelos de previsión— o bien construir modelos teóricos capaces de «reproducir» mediante formas analíticas sencillas la compleja realidad que los ha generado. Este segundo objetivo es el que nos proponemos en el presente trabajo.

Para comenzar la exposición definiremos lo que hemos llamado modelos de ajuste polinómico mediante programas de regresión.<sup>22</sup> Sea  $X_t$  la función

22. Los modelos de ajuste polinómico se utilizan, en general, para cuantificar el Ciclo-Trend y su valor para la previsión es dudosa (cf. DAVIS, H., *op. cit.*, p. 529). Aquí se utilizarán con el fin de determinar una estructura analítica que se «ajuste» lo más posible a la serie, para luego servirnos de ella con fines comparativos respecto a otros modelos que obtengamos. Su valor para nosotros es, por tanto, únicamente instrumental.

que, por hipótesis, ha generado la serie y supongamos que es posible descomponerla como

$$X_t = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_n f_n(t) + z_t$$

En donde:

$a_i$  son constantes a determinar.

$f_i(t)$  son funciones de  $t$ .

$z_t$  es una variable aleatoria de media nula e incorrelacionada.

Se trata, pues, de determinar los valores de  $a_i$  que hacen mínima la expresión

$$\sum_{s=0}^t \left[ X_s - \sum_{i=1}^n a_i f_i(s) \right]^2$$

y de elegir aquel modelo que, con todos sus coeficientes significativos, dé un coeficiente de correlación total más alto.<sup>23</sup>

Evidentemente el método adolece del grave inconveniente de que la matriz  $X$ , por la forma en que se ha obtenido, presentará un grado de correlación alto (como indicará el test Durwin-Watson), lo que reducirá notablemente su valor y, como consecuencia, los resultados que se obtengan sean de dudosa veracidad. De todos modos, dado el objetivo que nos planteamos en la elaboración de estos modelos estas limitaciones, que en otras circunstancias serían inadmisibles, se considerarán secundarias.

Vamos a exponer ahora los conceptos más importantes que están a la base de los llamados modelos estocásticos lineales. Su interés radica, a nuestro juicio, en que son de carácter muy general y que utilizan satisfactoriamente toda la información que se deriva del análisis de la serie histórica tanto en el campo temporal (análisis de la función de autocorrelación) como en el frecuencial (análisis espectral). Como ya se ha indicado en otra parte del presente trabajo, son los modelos evolutivos aquellos que con una mayor realidad pueden reflejar un fenómeno económico; a ellos, pues, naturalmente, junto con los modelos estacionarios, nos ceñiremos.

Se puede definir como modelo estocástico representativo de una serie histórica a «una relación funcional entre un cierto número de variables aleatorias relativas al proceso estocástico que la ha generado (la serie histórica),

23. Esto es, en cierta manera, una transformación de lo que en la literatura inglesa se conoce con el nombre de «Exponential Smoothing» (cf. BOX-JENKINS, *op. cit.*) que se basa en calcular los  $a_i$  que hacen mínima la expresión

$$\sum_{s=0}^t (1-K)^{t-s} \cdot \left[ X_s - \sum_{i=1}^n a_i f_i(s) \right]^2$$

en donde  $K$  es una constante comprendida entre 0 y 1 que se fija *a priori* según la forma de la serie en estudio.



en la cual se incluyen las principales características de dicho proceso).<sup>24</sup> En el caso de que dicha representación funcional sea del tipo lineal, el modelo se llama lineal.

Nos limitaremos, pues, a describir los modelos estocásticos lineales estacionarios y evolutivos que permiten la interpretación de una serie histórica.

1) Modelos autorregresivos  $AR(p)$ . Su expresión analítica es

$$\bar{X}_t = \Phi_1 \bar{X}_{t-1} + \Phi_2 \bar{X}_{t-2} + \dots + \Phi_p \bar{X}_{t-p} + a_t$$

En donde  $\bar{X}_t = X_t - \mu$ , es decir, son los valores de la serie referidos a la media temporal, y  $a_t$  es una variable aleatoria (expresión del error cometido) de media nula, varianza constante e incorrelacionada con los valores de la serie.

La expresión anterior, utilizando el operador  $B$  (*Backward Shift Operator*),<sup>25</sup> se puede expresar del siguiente modo

$$(1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \dots - \Phi_p B^p) \bar{X}_t = a_t$$

Es decir,

$$\Phi(B) \bar{X}_t = a_t$$

en donde

$$\Phi(B) = 1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \dots - \Phi_p B^p$$

Dos importantes conceptos a considerar en los procesos estocásticos estacionarios son los de estacionalidad e invertibilidad.<sup>26</sup> Ambas condiciones están íntimamente ligadas a las características de las soluciones de la ecuación  $\Phi(B) = 0$ . Se demuestra que la condición necesaria y suficiente para que un proceso autorregresivo sea estacionario es que dichas soluciones sean exteriores al círculo unitario, es decir, que sean en módulo mayores que la unidad.

Dada la expresión analítica de los modelos lineales autorregresivos, el valor de la función de autocorrelación es

$$\rho(k) = \Phi_1 \rho(k-1) + \Phi_2 \rho(k-2) + \dots + \Phi_p \rho(k-p)$$

que permite definir las llamadas ecuaciones de Yule-Walker.

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \Phi_1 & + \Phi_2 \rho(1) + \Phi_3 \rho(2) & + \dots + \Phi_p \rho(p-1) \\ \rho(2) &= \Phi_1 \rho(1) & + \Phi_2 & + \Phi_3 \rho(1) & + \dots + \Phi_p \rho(p-2) \\ \rho(3) &= \Phi_1 \rho(2) & + \Phi_2 \rho(1) + \Phi_3 & + \dots + \Phi_p \rho(p-3) \\ &\vdots & & & \\ \rho(p) &= \Phi_1 \rho(p-1) + \Phi_2 \rho(p-2) + \Phi_3 \rho(p-3) + \dots + \Phi_p \end{aligned}$$

24. CARLUCCI, F., *Introduzione ai modelli stocastici rappresentativi ed alla previsione*, p. 16.

25. Una breve pero excelente síntesis del álgebra de operadores se encuentra en GALLO, F., *Introduzione alle equazioni alle differenze finite*, Dispense della Facoltà di Scienze Statistiche, Roma 1971.

26. Un modelo se dice invertible si es posible la transformación  $\Phi(B) \bar{X}_t = a_t$ ,  $\bar{X}_t = \pi(B) A_t$  en donde  $(B) = \pi^{-1}(B)$  y la sucesión así obtenida resulta convergente. La condición de estacionariedad es independiente de la invertibilidad (BOX-JENKINS, *op. cit.*, pp. 50-51 y 101).

Más adelante se verá su utilidad en el cálculo de los parámetros del modelo.

Igualmente es fácil determinar que la varianza total del sistema es

$$\gamma(0) = \frac{\sigma_a^2}{1 - \sum_{i=1}^p \Phi_i \rho(i)}$$

2) Modelos a media móvil.  $MA(q)$ . Que siguen una ley de la forma

$$\bar{X}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

O lo que es lo mismo:

$$\bar{X}_t = \theta(B) a_t$$

En donde

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

Al igual que en los modelos autorregresivos, en los modelos a media móvil es posible definir las condiciones de estacionalidad e invertibilidad. La estacionalidad en ellos está asegurada dado el número finito de elementos que la componen y la condición de invertibilidad exige, como es fácil de ver, que las raíces de la ecuación  $\theta(B) = 0$  sean exteriores al círculo unitario.

A partir de su expresión general la función de autocorrelación puede ser calculada y toma los valores

$$\rho(k) = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & \text{si } k > q \end{cases}$$

Dado que la varianza total del proceso es

$$\gamma(0) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_a^2$$

y la autocovarianza

$$\gamma(k) = (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q) \sigma_a^2$$

3) Modelos mixtos autorregresivos y a media móvil.  $ARMA(pq)$ .

Estos modelos son una síntesis de los dos anteriores y su expresión general es

$$\bar{X}_t = \Phi_1 \bar{X}_{t-1} + \Phi_2 \bar{X}_{t-2} + \dots + \Phi_p \bar{X}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

o bien

$$\Phi(B) \bar{X}_t = \theta(B) a_t$$

en donde, de igual manera que en los modelos autorregresivos y en los de media móvil

$$\Phi(B) = 1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \dots - \Phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

En estos modelos para que se cumplan las condiciones de estacionalidad e invertibilidad se ha de verificar que las soluciones de las ecuaciones  $\Phi(B)=0$  y  $\theta(B)=0$  sean en módulo mayores que la unidad.

Evidentemente, la forma de la función de autocorrelación y la varianza del proceso serán expresiones combinadas de los modelos  $AR(p)$  y  $MA(q)$ .

Cuanto se ha visto hasta ahora puede resumirse en el esquema adjunto.

Los modelos anteriormente descritos sirven para explicar procesos estocásticos estacionarios; existe, sin embargo, otro importante grupo de procesos estocásticos —los llamados evolutivos— que, como se ha indicado en otra parte, son particularmente aptos para la interpretación de fenómenos de tipo económico. Ellos también pueden ser estudiados bajo alguno de los esquemas anteriormente propuestos mediante la aplicación previa de algunos filtros lineales.<sup>27</sup> Por filtro lineal se entiende al «operador que transforma el

proceso estocástico  $X_t$  en el proceso  $Y_t$ , definido como  $Y_t = \sum_{s=p}^q b_s X_{t-s}$ , donde  $p$  y  $q$  son constantes positivas enteras, que pueden tomar valor finito o infinito y donde la sucesión, finita o infinita  $(b_{-p}, \dots, 0, \dots, b_q)$  está formada por números reales y viene llamada función de respuesta del impulso».<sup>28</sup> Dicho filtro se define estable si un input limitado produce un output también limitado.

A través de estos conceptos disponemos, pues, de un método para transformar series evolutivas en estacionarias: se filtra la serie original —que en fenómenos económicos generalmente no es estacionaria— a través de un filtro lineal  $\nabla$  y se estima el espectro de la nueva serie obtenida; si dicho espectro presenta «picos» en las frecuencias bajas (que corresponden, como sabemos, a altos períodos, representando, por tanto, la componente llamada ciclo-tendencia) se procede iterativamente hasta que dichos picos desaparezcan. La serie

27. En la nota 11 se dio una primera aproximación al concepto de filtro. Dicho concepto está íntimamente ligado al de operador, del que ya se habló en la nota 25. (Cf. también MALINVAUD, *op. cit.*, pp. 451-468 de la edición en castellano.)

28. CARLUCCI, F., *op. cit.*, pp. 73 ss.). Filtros lineales son los filtros de diferencias  $\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$  —operador  $\nabla$  o «Backward Difference operator»—.

«La eliminación del Ciclo-Tendencia por medio de filtros de diferencias comporta la transformación de una serie histórica no estacionaria en el finito en una serie estacionaria, relativa a un proceso estocástico  $Y_t$ , más un polinomio de orden  $d$  de la variable tiempo... Aplicando  $d$  veces dichos filtros, se reduce el polinomio a una constante que se puede sumar a la media de  $Y_t$ ».

Es decir, que  $X_t = Y_t + \sum_{j=0}^d m_j \cdot t^j$  aplicando  $\nabla$   $d$  veces se obtiene  $\nabla^d X_t = \nabla^d Y_t + K$

final obtenida puede ser considerada como estacionaria y, por tanto, ser legítimo aplicarle un modelo de los anteriormente estudiados.

Según esto, llamando  $d$  al número de veces que se ha necesitado aplicar el operador  $\nabla$ , se definen los modelos lineales evolutivos — $ARIMA(pdq)$  autorregresivos integrados (integrated) a media móvil—, que servirán para analizar la mayor parte de las series económicas.

De una manera más intuitiva, aun cuando menos rigurosa, se puede llegar a la idea que está a la base de los modelos  $ARIMA(pdq)$  aplicando algunos conceptos del álgebra de operadores: se ha visto que un modelo  $ARMA(pq)$  es estacionario si las soluciones de la ecuación  $\Phi(B) = 0$  son exteriores al círculo unitario; es evidente que si las raíces están en el interior de dicho círculo el modelo «estalla»; pero, ¿qué sucede si algunas soluciones pertenecen al círculo, es decir, si son iguales a la unidad? (En análisis prácticos es evidente que nos referimos a soluciones que están próximas al círculo.) Supongamos que son  $d$  las soluciones que cumplen esta condición, es decir, que en la ecuación  $\Phi(B) = 0$  es posible establecer que  $\Phi(B) = (1 - B)^d \cdot \Phi_1(B)$ . En este caso, y recordando que entre los operadores  $\nabla$  y  $B$  existe la relación  $1 - B = \nabla$ , resulta que el modelo puede ser descompuesto de la siguiente forma

$$\Phi(B) \bar{X}_t = \theta(B) a_t \equiv \nabla^d \Phi_1(B) \bar{X}_t = \theta(B) a_t$$

y llamando  $\nabla^d X_t = Z_t$  resulta que el proceso  $\Phi(B)Z_t = \theta(B) a_t$  que cumple las condiciones de un modelo autorregresivo a media móvil de parámetros  $(pq)$ .

Este criterio nos permite una nueva definición de los procesos estocásticos no estacionarios en evolutivos y no evolutivos, bajo la hipótesis de linealidad: serán evolutivos aquellos procesos que tengan una o más soluciones de la ecuación correspondiente a la parte autorregresiva sobre el círculo unitario (iguales en módulo a la unidad) y el resto de ellas exteriores a él. Por el contrario serán no evolutivos (o de otros tipos) aquellos procesos en que se compruebe que alguna de las soluciones sea interior a dicho círculo.

Definidos, pues, los diversos modelos que presentan interés para el estudio de series históricas representativas de fenómenos económicos, resta por describir los criterios que se emplean para la determinación de los diversos parámetros que componen un modelo. El estudio se referirá, en general, a un modelo  $ARMA(pq)$  ya que:

- 1) Los modelos evolutivos son reducibles a uno autorregresivo a media móvil mediante las técnicas de filtraje más arriba descritas.
- 2) Un modelo  $AR(p)$  es equivalente a uno  $ARMA(p\ 0)$ .
- 3) Un modelo  $MA(q)$  lo es, igualmente, a uno  $ARMA(0\ q)$ .

Se ha visto que los parámetros a estimar en estos modelos son  $\mu$ ,  $\sigma_a^2$ ,  $\Phi_i$ ,  $\Phi_j$ . La media, a través de los teoremas ergódicos puede ser calculada directamente.

Las ya definidas ecuaciones de Yule-Walker permiten un método para el cálculo de los coeficientes correspondientes a la parte autorregresiva, partiendo de los valores estimados para la función de autocorrelación, según el método y criterios ya descritos más arriba. La determinación del grado autorregresivo —valor de  $p$ — se hace a través de una valoración relativa de la varianza residua, es decir, aquel que disminuya de una forma más sustancial la varianza del proceso.

Una vez calculada la componente autorregresiva de la serie, se elimina ésta y la serie resultante contendrá únicamente la parte que corresponde a la media móvil, cuyos parámetros pueden ser determinados a través de las ecuaciones de autocovarianzas en un proceso  $MA$ , una vez que dichos valores han sido estimados por el método general ya visto.<sup>29</sup>

La determinación de la estructura del modelo definitivo se basa, al igual que en el análisis de la componente autorregresiva, en una valoración comparada de la varianza residua del sistema.

El valor que toma la varianza total residua, nos dará una idea de hasta qué punto el modelo autorregresivo —integrado— a media móvil elegido como representativo del proceso, sirve para «explicar» dicha serie.

Resumiendo los conceptos anteriormente dichos, el procedimiento de determinación del modelo explicativo de la serie es el expresado más adelante.

Ya se ha visto cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que un modelo  $ARIMA(pdq)$  pueda ser invertible; aplicando, pues, esta propiedad todo modelo puede ser transformado en un  $AR(00)$ , forma ésta que presenta una mayor facilidad interpretativa de los resultados obtenidos<sup>30</sup> y que permitirá una «reconstrucción» de la serie y su representación gráfica.

Resta, por último, la determinación de un índice que permita valorar la capacidad interpretativa del modelo determinado; es decir, establecer un criterio lógico que mida el grado de relación existente entre la serie observada y aquella que se obtiene a través de la aplicación del modelo elegido, lo que permitirá también establecer prioridades respecto a la «bondad» en el ajuste de los distintos modelos teóricos que se suponen interpretativos.

Es evidente que el coeficiente de determinación que se calcula para estos

29. La resolución del sistema de ecuaciones que permitan determinar los coeficientes de la componente a media móvil presenta notables dificultades dado su carácter no lineal. Dicho sistema se resuelve por un método iterativo, partiendo del valor  $K = 0$  hasta  $K = q$  (ya se sabe que  $\gamma(K) = 0$  para valores de  $K$  mayores de  $q$ ).

30. Es decir, tras la aplicación de dicha transformación el modelo  $ARIMA(pdq)$  calculado

$$\nabla^d(\bar{X}_t - \Phi_1 \bar{X}_{t-1} - \dots - \Phi_p \bar{X}_{t-p}) = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

puede ser expresado como  $X_t = K + \sum_{i=1}^{\alpha} \pi_i X_{t-i} + a_t$

En donde  $K$  es una constante que depende  $\mu$  (media temporal) y de los valores de  $\pi_i$ . El valor de  $\alpha$  representa el grado de retardo en la serie y, en general, se fija según los valores relativos de los  $\pi_i$ .

# Identificación de un modelo ARIMA(pdq)

Tipo de modelo	Serie original	Serie transformada	Parámetros calculados	Procedimientos
	$X_t$	$\bar{X}_t = X_t - \mu$	$\mu$	Teoremas ergódicos
ARIMA(pdq)	$\Phi(B) \nabla^d \bar{X}_t = \theta(B) a_t$	$\Phi(B) Y_t = \theta(B) a_t$	$d$	Análisis autocorrelación Análisis espectral
ARMA(pq)	$Y_t \Phi^{-1}(B) \theta(B) a_t$	$Z_t = Y_t - \sum_{j=1}^p \hat{\Phi}_j \cdot Y(t-j)$	$P, \hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_{p_1}, \dots, \hat{\Phi}_p, \hat{\sigma}_a^2, \hat{\sigma}_r^2$	Análisis autocorrelación Ec. Yule — Walker
MA(q)	$Z_t = \theta(B) a_t$	$a_t$	$q, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \sigma^2 \text{ residua}$	Análisis autocorrelación Ecuaciones no lineales

Modelo	Autorregresivo $AR(p)$	Media móvil $MA(q)$	Autorregresivo-media móvil $ARMA(p,q)$
Forma explícita	$\bar{X}_t = \Phi_1 \bar{X}_{t-1} + \dots + \Phi_p \bar{X}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$		$\bar{X}_t = \Phi_1 \bar{X}_{t-1} + \dots + \Phi_p \bar{X}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$
Operadores	$\Phi(B) = 1 - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p$	$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$	$\Phi(B) = 1 - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p$ $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$
Forma sintética	$\Phi B \bar{X}_t = a_t$	$\bar{X}_t = \theta(B) a_t$	$\Phi(B) \bar{X}_t = \theta(B) a_t$
Forma alternativa	$\bar{X}_t = \Phi^{-1}(B) a_t$	$\theta^{-1}(B) \bar{X}_t = a_t$	$\bar{X}_t = \Phi^{-1}(B) \theta(B) a_t$ $\theta^{-1}(B) \Phi(B) \bar{X}_t = a_t$
Parámetros a estimar	$\mu, \sigma_a^2, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$	$\mu, \sigma_a^2, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$	$\mu, \sigma_a^2$ $\Phi_1, \dots, \Phi_p$ $\theta_1, \dots, \theta_q$

finés en el análisis de la regresión no puede ser considerado, como se ve en la descomposición de la varianza, ya que el paso a la expresión

$$\sum (Y - \bar{Y})^2 = \sum (Y_e - \bar{Y})^2 + \sum (Y - Y_e)^2$$

donde:

$Y - \bar{Y}$  = Desviación total.

$Y_e - \bar{Y}$  = Desviación explicada.

$Y - Y_e$  = Desviación inexplorada.

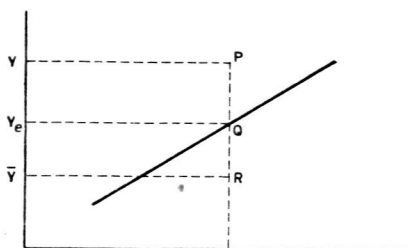


FIG. 3

Es posible únicamente porque  $Y_e$  se ha obtenido a través del método de mínimos cuadrados.<sup>31</sup>

Un índice que ha sido utilizado con estos fines es el llamado índice de ajuste, que es el cociente entre la suma de las desviaciones absolutas entre los valores observados y los calculados y la suma de los valores observados, es decir,

$$I = \frac{\sum |X(t) - \bar{X}(t)|}{\sum X(t)}$$

Dicho índice, a juicio del autor, no es suficientemente explícito debido a la forma en que ha sido calculado: el denominador es la suma de los elementos observados en la serie que se presentan, por lo general, en número muy alto, lo que provocará necesariamente un valor muy bajo del índice sin que para ello intervenga en absoluto la calidad del ajuste; es decir, para valores altos en el número de observaciones (hecho deseable por otra parte) la capacidad de interpretación del índice será mínima dados los grandes valores que tomará su denominador.

Teniendo en cuenta lo anterior, en el presente trabajo, se tomarán otros tipos de indicadores.

El principal de ellos es el que llamaremos «índice de desajuste medio». Veamos su concepto: siendo  $X_t$  y  $\hat{X}_t$  los valores observados y los obtenidos tras la aplicación del modelo, la expresión  $\sum |X_t - \hat{X}_t|$  representará, en valor

31. Esquema tomado de TAMANE, Y., *Matemáticas para economistas*, p. 553.

32. PICCOLO, D., «Analisi dei prezzi all'ingrosso in Italia», *Rassegna economica*, 1971. También del mismo autor «L'evoluzione dei prezzi al consumo in Italia», *Rassegna Economica*, núm. 2, 1973



absoluto, las variaciones no explicadas. La expresión  $\sum |X_t - \mu|$  —en donde, como sabemos,  $\mu$  representa la media temporal— será la suma en valor absoluto de las desviaciones no explicadas por el «modelo» más elemental que se pueda construir: la media del proceso. Según esto, el índice de desajuste medio lo definiremos como

$$\text{IDM} = \frac{\sum |X_t - \bar{X}_t|}{\sum |X_t - \mu|}$$

que indicará el porcentaje que representa la «no explicación (desajuste) del modelo considerado con respecto al valor medio. Evidentemente un modelo será más eficaz que otro en la medida en que su índice sea menor, es decir, aquel que presente un porcentaje de no explicación menor.

También el valor que tome la suma, con su signo, de las desviaciones — $\sum |X_t - \hat{X}_t|$ — y el porcentaje que represente la varianza residual del modelo sobre la varianza original ayudarán a la definición de un modelo como el más idóneo.

#### IV. ANÁLISIS DEL ÍNDICE DE PRECIOS AL POR MAYOR DE PRODUCTOS AGRÍCOLAS: ESTUDIO DE SUS COMPONENTES Y DETERMINACIÓN DE UN MODELO INTERPRETATIVO

En esta parte, que puede ser considerada con carácter meramente introductivo, se intentará obtener de las series la mayor cantidad de información posible y, en su caso, establecer el método más idóneo para el tipo de análisis que se intenta hacer.

Para ello se parte de los datos ofrecidos por el Instituto Nacional de Estadística en sus boletines mensuales. Dichos datos se recogen en el cuadro 1 y su representación en el gráfico 1. Dado que el año base es inferior al mínimo, los datos pueden ser considerados como homogéneos y serán considerados como base estadística de partida en el análisis.

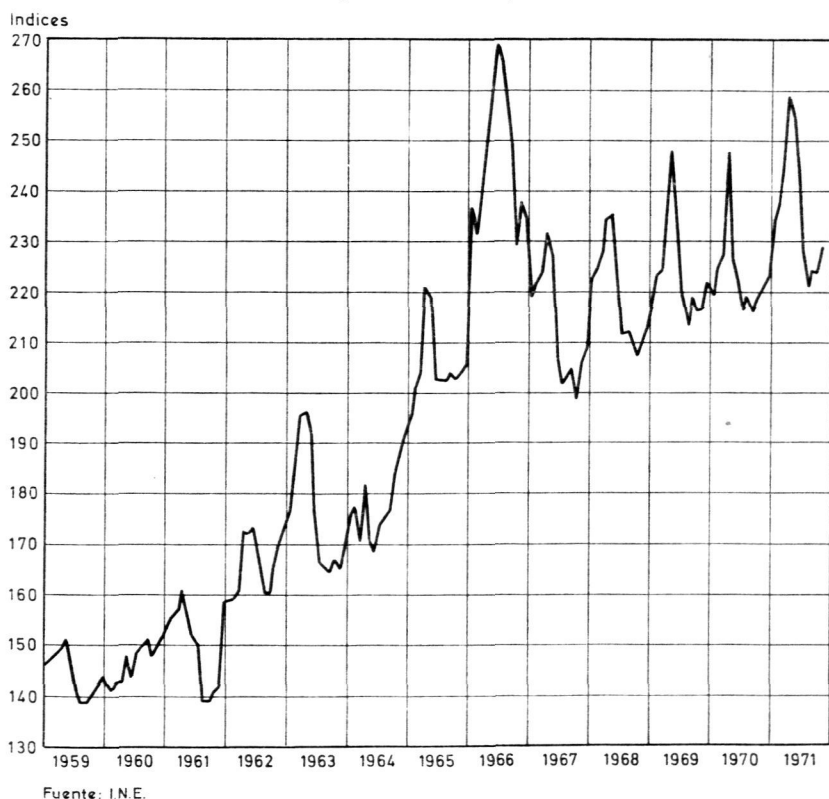
En esta primera parte nos centraremos en el estudio del llamado ciclo-tendencia y de las oscilaciones de carácter estacional (o de otro tipo, si pueden ser identificadas). Respecto a la tendencia, se considera que la media anual puede ser un buen indicador para ella, por lo que se ha elaborado el gráfico 2, en el que se recoge el comportamiento del valor medio anual del índice: dicho gráfico muestra un incremento total medio del 4,5 por ciento, presentándose más o menos lineal en el primer y último tramo de la serie, períodos entre los que se intercala una fase caracterizada por un brusco ascenso seguido por un no menos brusco descenso del índice.

Considerada la serie en su conjunto con objeto de definir posibles ciclicidades en ella, se ve que en todo su recorrido presenta tres períodos que, en

CUADRO 1. — Precios al por mayor de productos agrícolas  
(Año base 1955)

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1959	146,8	147,1	148,6	148,8	150,7	144,7	140,3	138,9	138,7	140,6	141,8	143,4
1960	142,4	141,2	142,7	142,7	148,0	144,1	148,3	149,8	150,7	147,8	149,5	151,5
1961	153,7	155,9	156,8	160,6	156,9	151,4	150,1	139,2	139,1	140,6	142,1	158,4
1962	158,6	159,8	160,8	172,3	172,5	173,4	166,6	160,0	160,1	165,6	170,2	173,7
1963	176,6	185,4	195,0	195,6	192,1	176,8	166,8	165,5	164,9	166,1	155,4	170,9
1964	175,8	177,0	170,5	181,9	170,8	168,9	173,3	175,8	176,8	184,4	188,6	191,4
1965	196,6	201,0	204,8	220,0	218,7	202,6	202,2	202,4	203,7	202,7	204,0	206,4
1966	236,8	231,5	239,9	250,3	258,5	269,8	266,0	256,7	249,4	229,4	237,3	234,5
1967	219,1	221,6	223,0	231,5	227,2	206,8	201,2	202,1	203,6	199,4	205,6	208,7
1968	222,8	224,5	227,3	234,8	235,0	223,3	211,4	211,4	209,9	207,4	210,7	212,0
1969	217,5	223,1	223,9	236,8	247,8	230,6	219,4	213,3	217,9	216,5	216,5	221,5
1970	219,6	224,9	227,2	247,5	236,6	222,0	216,9	218,3	216,0	218,5	220,7	222,4
1971	234,4	238,0	245,2	258,5	254,1	244,6	228,2	221,1	224,3	224,2	229,9	—

GRÁFICO 1.—*Índices mensuales de precios al por mayor de productos agrícolas. Período 1959-1971*  
(Año base 1955)

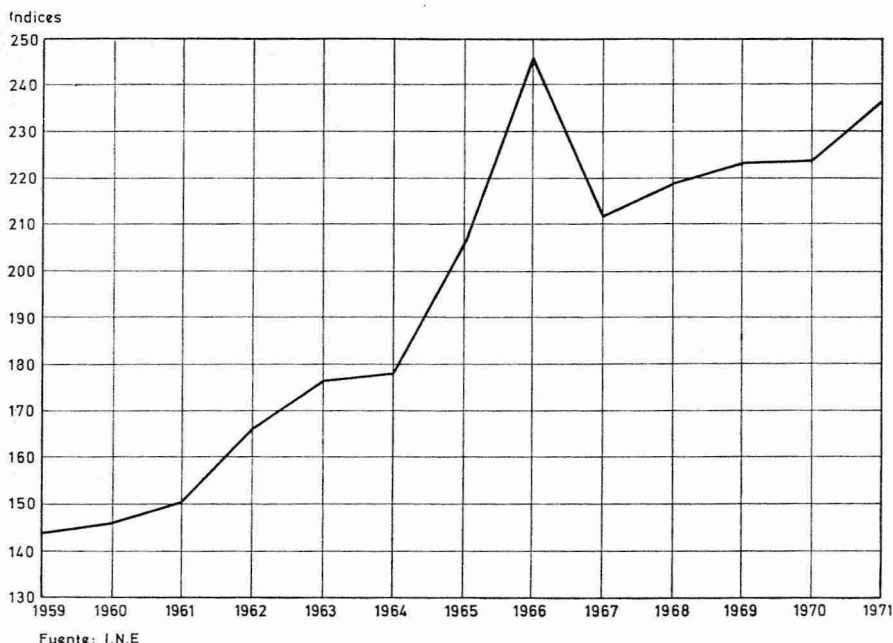


aparición, son diversos: en el primero y segundo —según la tipología que parece desprenderse de lo anterior— las ciclicidades son difíciles de identificar: en el primero de ellos parece enmascarada por otras de mayor o menor longitud y en el segundo tramo la fuerte tracción que parece provocar la subida y bajada del valor medio del índice, dominan por completo los posibles efectos estacionarios. Un tercera fase —la última— parece estar presente en la serie con características cíclicas más ajustadas a lo que era de esperar.

Según lo anterior, en base a los dos criterios considerados, parece posible dividir la serie en tres fases más o menos homogéneas y que difieren bastante entre ellas:

*Fase 1959-1964:* El comportamiento del valor medio —que como hemos dicho parece razonable identificarlo con el componente ciclo-tendencia— aparece gobernado por una tendencia bastante lineal con una inclinación del 4,2

GRÁFICO 2. — *Índices de precios. Medias anuales*  
*Período 1959-1971*



por ciento (ligeramente inferior al valor medio total). Respecto a la componente cíclica poco se puede decir ya que su comportamiento no parece nada «claro». En definitiva, presenta un crecimiento bastante lineal, aunque inferior al valor medio total y ciclicidades de difícil identificación.

*Fase 1964-1967:* La característica de este período es el brusco crecimiento del valor medio anual, que alcanza su valor máximo (que es también el máximo del período en estudio) en el año 1966 y al que sigue un no menos fuerte descenso. Estas bruscas oscilaciones enmascaran totalmente otras posibles ciclicidades que, indudablemente, están presentes.

*Fase 1969-1971:* Es la parte más regular de la serie en los dos aspectos que se están considerando: su crecimiento medio corresponde a un 3,1 por ciento anual y las componentes periódicas aparecen bastante bien dibujadas con amplitud anual y máximos en los meses de primavera y mínimos en el otoño.

Según esto, parece indicado iniciar el estudio de la serie de precios agrícolas en base a esta subdivisión y centrar el interés en las causas que han motivado estos cambios en un período de tiempo tan breve: se trataría en definitiva de investigar en los períodos de «cambio de fase» más que en la serie en su conjunto. Este método de análisis, de uso bastante común entre los economistas,

no es el que se pretende seguir en el presente trabajo, ya que nuestro interés se centra, fundamentalmente, en la posible determinación de un «algo» que sea válido en todo lo largo del período. En definitiva, se trata de responder a las siguientes preguntas. ¿Existe, a pesar de su heterogeneidad, algún tipo de estructura que permita definir la serie en su conjunto? ¿Es posible obtener alguna cuantificación de ella?

Un primer intento de respuesta a estas interrogantes se ha intentado a través de un ajuste polinómico.

El método a seguir (ya indicado y criticado en otra parte) es simplemente adaptar un programa de regresión a un polinomio de diversos grados y elegir aquel que ofrezca un índice de ajuste más elevado. El método es de dudosa aceptación teórica, pero nos permitirá poner de relieve la mayor potencia, tanto teórica como interpretativa, de los que constituyen el cuerpo central del trabajo realizado.

Los resultados obtenidos se encuentran recogidos en los cuadros 2 y 3<sup>33</sup> y merecen un pequeño comentario a partir del polinomio que mejor se ajusta a la serie. Dicho polinomio es

$$I_g X_t = 5,01 + 0,818 \cdot 10^{-2} t + 0,355 \cdot 10^{-3} t^2 - 0,331 \cdot 10^{-5} t^3 + \\ (0,228 \cdot 10^{-2}) \quad (0,592 \cdot 10^{-4}) \quad (0,509 \cdot 10^{-6}) \\ + 0,954 \cdot 10^{-8} \cdot t^4 + 0,380 \cdot 10^{-1} \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi t}{6} - 1 \right) \\ (0,181 \cdot 10^{-8}) \quad (0,705 \cdot 10^{-2})$$

con un coeficiente de correlación corregido equivalente al 0,892. Naturalmente, dado el origen de las variables, el coeficiente Durbin-Watson indica la presencia de una fuerte autocorrelación con  $d = 0,28$ .

Es evidente que ni desde el punto de vista estadístico ni desde el económico la ecuación es aceptable: la matriz de los coeficientes, por su origen, es singular, lo que hace difícilmente aceptable los resultados obtenidos,<sup>34</sup> aunque se presenta un índice de ajuste bastante aceptable. Desde el punto de vista interpretativo son aún más pobres los resultados ya que, si bien se comprueba la existencia de un cierto grado de autocorrelación, es incapaz de dar alguna explicación sobre él y, además, la difícil estructura analítica reducen su valor interpretativo prácticamente a nada.

De todo lo anterior se deduce que si bien es posible afirmar que la serie

33. En dichos cuadros se incluyen sólo aquellas ecuaciones que han dado un coeficiente de correlación corregido superior al 0,8 y con todos sus coeficientes significativos. Los coeficientes de las variables trigonométricas se han obtenido por medio de una segunda interpolación en los residuos obtenidos para las series polinómicas de mejor ajuste.

Polinomios de grado superior no se han considerado por el alto grado de correlación que presentaban las matrices de los coeficientes.

34. Los problemas que se derivan de la autocorrelación y sus posibles soluciones se encuentran ampliamente tratados por Bruno CHIANDOTTO en su artículo «L'autocorrelazione nelle indagini econometriche», *Statistica*, núm. 2, 1968.

CUADRO 2. — Ecuaciones interpoladas en la serie

I	$X(t) = b_0 + b_1 t$
II	$X(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$
III	$X(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$
IV	$X(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4$
V	$X(t) = b_0 + \quad + b_2 t^2 + b_3 t^3$
VI	$X(t) = b_0 + \quad + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4$
VII	$X(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 \cos (2\pi t/12 - 4)$
VIII	$X(t) = b_0 + \quad + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \quad + b_5 \cos (2\pi t/12 - 4)$
IX	$X(t) = b_0 + \quad + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 \cos (2\pi t/12 - 4)$
X	$\log X(t) = b_0 + b_1 t$
XI	$\log X(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$
XII	$\log X(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$
XIII	$\log X(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4$
XIV	$\log X(t) = b_0 + \quad + b_2 t^2 + b_3 t^3$
XV	$\log X(t) = b_0 + \quad + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4$
XVI	$\log X(t) = b_0 + \quad + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + \quad + b_5 \sin (2\pi t/12 - 1)$
XVII	$\log X(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + \quad + b_5 \sin (2\pi t/12 - 1)$

CUADRO 3

Ecuación	Grado de significatividad						$R_2$	$R^2$
	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\beta}_6$		
I	22,631	—	—	—	—	—	0,769	—
II	10,892	— 5,001	—	—	—	—	0,802	0,800
III	0,750	3,202	— 4,130	—	—	—	0,822	0,819
IV	3,379	5,120	— 4,847	4,338	—	—	0,842	0,838
V	—	15,913	— 12,619	—	—	—	0,821	0,819
VI	—	7,261	— 4,271	2,742	—	—	0,830	0,826
VII	— 3,352	5,145	— 4,893	4,397	—	— 2,206	0,847	0,842
VIII	—	16,035	— 12,235	—	—	— 2,024	0,826	0,823
IX	—	7,459	— 4,441	2,901	—	— 2,236	0,835	0,830
X	24,210	—	—	—	—	—	0,793	—
XI	13,187	— 6,594	—	—	—	—	0,839	0,837
XII	1,702	2,931	— 4,136	—	—	—	0,855	0,852
XIII	— 3,294	5,519	5,340	4,827	—	—	0,874	0,870
XIV	—	18,408	— 14,282	—	—	—	0,852	0,852
XV	—	9,170	— 5,670	3,848	—	—	0,865	0,862
XVI	—	10,187	— 6,402	4,418	5,297	—	0,886	0,883
XVII	— 3,434	5,923	— 5,773	5,248	5,385	—	0,895	0,892

«crece», que presenta «ciclicidades» y que es según una cierta dependencia entre los diversos valores, la cuantificación de todo esto da escasos resultados interpretativos y de difícil aceptación teórica.

Según esto, pasamos a estudiar la serie según otro tipo de análisis que, en nuestra opinión, permite una satisfactoria interpretación de la serie en los aspectos que nos habíamos propuesto.

Como ya sabemos, el análisis de una serie histórica puede llevarse a cabo considerando a ésta como la realización parcial de un proceso estocástico, análisis que puede hacerse si la serie cumple ciertas condiciones muy generales y que deben ser comprobadas previamente. De entre ellas, es fundamental comprobar que los elementos que componen la serie no son realizaciones de variables perfectamente aleatorias —es decir, concebibles, por ejemplo, como variables aleatorias normales independientes— ya que si esto se verificase, todo ulterior trabajo carecería de sentido. Afortunadamente, en el análisis de series históricas que son reflejo de hechos económicos, esta hipótesis de perfecta casualidad puede ser rechazada *a priori* ya que, en sí mismo, no tienen ningún sentido plantearse la idea de perfecta independencia en el tiempo de un hecho económico;<sup>35</sup> más bien es todo lo contrario: admitida *a priori* una cierta dependencia entre los diversos datos, se trata de cuantificar de alguna manera ese cierto grado de relación existente. Tampoco cabe plantearse la hipótesis de una relación determinística absoluta: son tantas las variables que intervienen y tan complejas y aun desconocidas las relaciones que las ligan, que un determinismo a ultranza resulta del todo inconsistente como método de análisis.

Admitida, pues, la pertenencia de las series económicas al gran grupo de series aleatorias generadas por procesos estocásticos, se trata de determinar, como ya se ha dicho, qué tipo de relación es capaz de explicar el fenómeno.

CUADRO 4

	$X(t)$	$\nabla X(t)$	$\nabla^2 X(t)$
Mínimo . . . . .	138,700	— 20,400	— 35,500
Máximo . . . . .	269,800	30,200	27,899
Media . . . . .	194,372	0,539	— 0,035
Desviación típica . . . . .	35,566	7,345	9,263
Coefficiente de Var. . . . .	0,182	13,613	262,471
Varianza . . . . .	1.264,987	53,961	85,816
I. asimetría . . . . .	— 0,019	— 0,015	— 0,508
I. curtosis . . . . .	— 1,222	0,958	2,292

35. Decíamos «afortunadamente no se debe realizar este análisis» por lo complejo que resulta dado el carácter no paramétrico de los tests a emplear, NADDEO, A., *Analisi delle causalità*, Istituto di Calcolo della probabilità, Roma 1971. Es un interesante resumen de los tests de casualidad más comúnmente empleados.

Partiendo de esta idea, el esquema de estudio se realizará en las siguientes fases:

I) Análisis previos que permitirán encuadrar a la serie dentro de un grupo determinado.

II) Análisis de autocorrelación y análisis espectral que permitirán cuantificar alguna de las características de la serie no directamente observables y, además, darán algunas ideas sobre el tipo de modelo a utilizar, y

III) Determinación de un modelo explicativo de la serie que permitirá su estudio a través de una estructura —análisis de fácil interpretación.

Los análisis previos, que como hemos dicho permitirán un encuadre de la serie, parten de unas características de bastante inmediata observación. En el cuadro 4 se recogen las más importantes de ellas.

De su observación se deduce que la serie estudiada presenta en el tiempo una componente general creciente, por lo que la idea de estacionalidad en media no puede ser aceptada: en efecto, el valor medio en el período es 194,3 dentro de un amplio campo de variabilidad —igual a 131,1—. Igualmente no puede ser aceptada la idea de serie estacionaria en varianza, dado el alto valor que toma la varianza y la gran dispersión que presenta. Como confirmación de lo anterior se ha elaborado el histograma de la serie —gráfico 3— que aparece como el típico de una serie no estacionaria en varianza: es un histograma bipolar sin ninguna tendencia a la normalidad (igualmente lo reflejan los índices de curtosis y simetría).

Aplicando a la serie un filtro lineal  $\nabla$  de primer grado, se obtiene una modificación sustancial: la varianza reduce su valor a 53,93 —es decir, se reduce en un 95,8 por ciento—; el campo de variabilidad y el valor medio descienden notablemente y los índices de dispersión y simetría son mucho más claros. Pero, sobre todo, el histograma elaborado presenta una clara tendencia a la normalidad.

Una posterior aplicación del operador no mejora en absoluto la situación aunque, si bien la media disminuye, los restantes índices y características resultan peores que en el caso anterior.

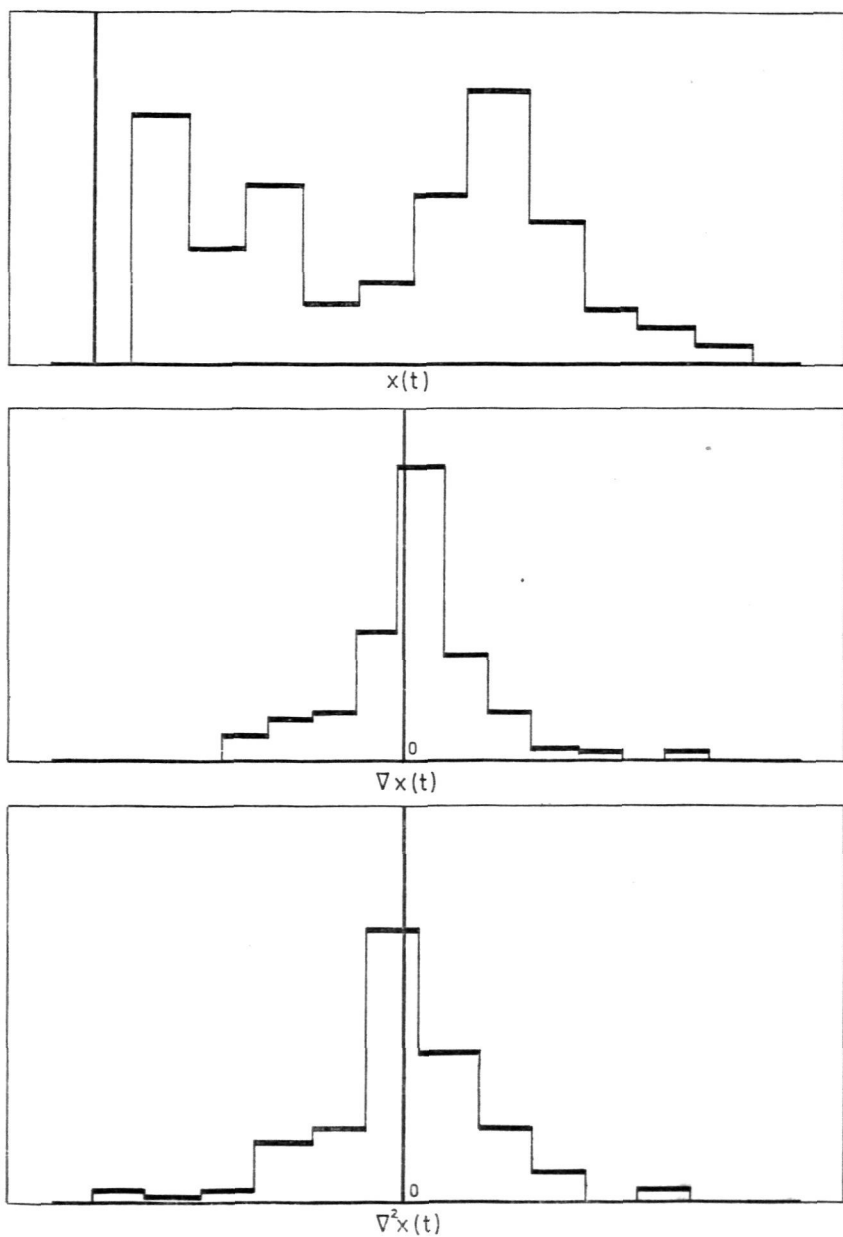
De lo dicho hasta ahora se pueden derivar algunos resultados parciales importantes:

1) La idea de estacionalidad no es aceptable para la serie pero sí, en principio, de ser clasificada como evolutiva de primer grado.

Realmente la primera parte es una pobre aportación, pero no así la segunda, ya que, si bien desde un principio podría haberse admitido que la serie no es estacionaria dado que es reflejo de la evolución de un índice de precios —creciente en cualquier caso y sujeto a oscilaciones—, una primera idea de «qué grado» de evolución presenta no es observable de una forma tan inmediata.

2) A la hora de estimar un modelo interpretativo es de esperar que la componente  $d = 1$  tenga un peso importante, o que el valor del coeficiente



GRÁFICO 3. — *Histogramas*

autorregresivo de primer orden sea muy próximo a la unidad, dado que el filtro de primeras diferencias es de gran valor explicativo y no así el de las segundas diferencias.

3) En los posibles modelos interpretativos seguramente no sea necesario estudiar modelos  $ARIMA(pdq)$  más allá de un  $d = 2$ , lo que evidentemente reduciría de una manera notable la mole de cálculos a realizar.

Estos resultados, de carácter muy provisional, serán reconsiderados en la que hemos llamado segunda fase del análisis, es decir, el estudio de la autocorrelación y análisis espectral, estudios que son complementarios entre sí.

El estudio de la función de autocorrelación se ha realizado tanto en la serie original como en aquellas que resultan de aplicar los filtros lineales de primeras y segundas diferencias. Los resultados obtenidos se recogen en el cuadro 5 y en los gráficos 4, 5 y 6.

Como ya se ha indicado en otra parte, el estimador de la función de autocorrelación utilizado es

$$\hat{r}(\tau) = \frac{\sum X(t) \cdot X(t + \tau)}{\sum X^2(t)}$$

En donde  $X(t)$  es la serie resultante de depurar la original de su valor medio. Dicho estimador es, siguiendo a Box-Jenkins, el de uso más común y el que goza de las mejores propiedades estadísticas.

Igualmente se han establecido intervalos de aceptabilidad para los resultados obtenidos a un nivel de 95 por ciento para la hipótesis  $H_0$  que, según el criterio de Bartlett, corresponde a valores de  $\pm \frac{1,96}{\sqrt{N}} = \pm 0,1575$ .

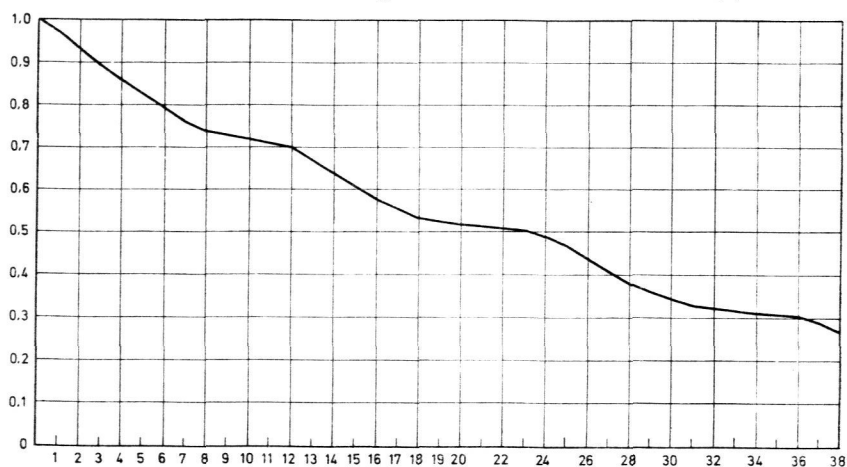
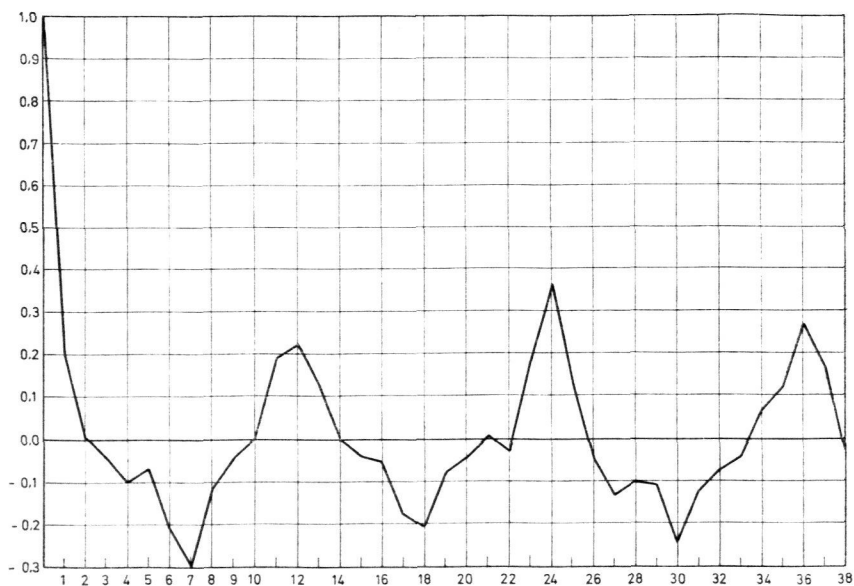
Los resultados obtenidos para la serie original presentan la forma típica de una función exponencial decreciente que puede indicar la presencia de una fuerte componente autorregresiva de primer orden. Este comportamiento aparece ligeramente atenuado en algunos tramos de la función de autocorrelación estimada, sobre todo entre aquellos valores de  $\tau$  que van de  $\tau = 12$  a  $\tau = 13$  en el primero de ellos, de  $\tau = 20$  a  $\tau = 25$  en el segundo y de  $\tau = 33$  a  $\tau = 38$  en el tercero. Como se ve, dichos tramos incluyen los valores 12, 24 y 36 respectivamente, que son indicadores de posibles ciclicidades anuales. De todas formas, es la componente autorregresiva de primer orden el resultado que debe resaltarse fundamentalmente. Es de señalar la precaución con que estos resultados deben ser tomados ya que, como se ha visto, la serie original no goza de las propiedades propias de las series estacionarias y, por tanto, la relación biunívoca entre la función de autocorrelación y la serie no está asegurada,<sup>36</sup> según nos enseña el teorema correspondiente.

36. Un estudio precipitado y parcial del análisis de autocorrelación sería, por ejemplo en este caso, interpolar en el gráfico de la función de autocorrelación correspondiente a  $X(t)$  una exponencial decreciente —se obtendría un coeficiente de ajuste altísimo— y en base a ello concluir que el modelo era de la forma  $\hat{X}_t = 0,969 X_{t-1} + a_t$ .

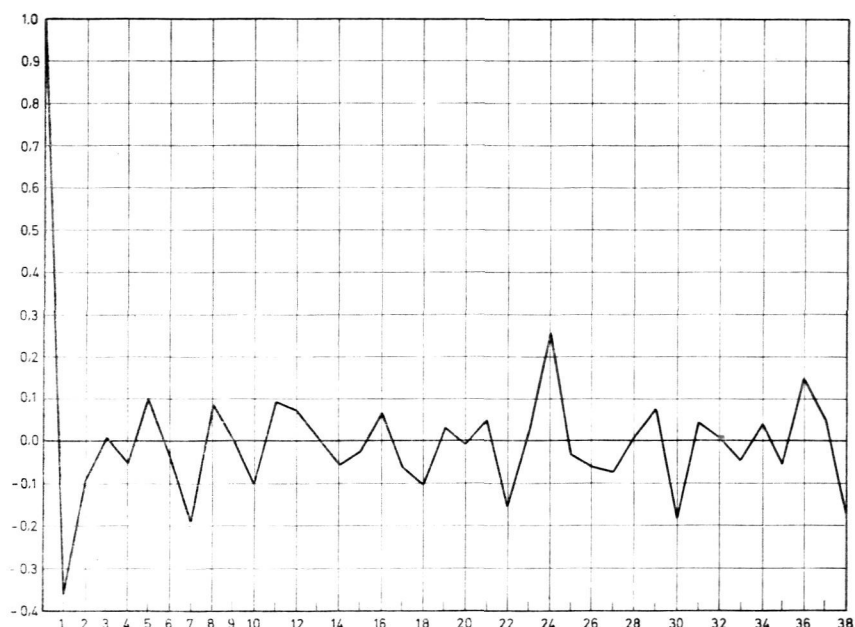
CUADRO 5. — *Correlogramas estimados*

$\rho(\tau)$	$X(t)$	$\nabla X(t)$	$\nabla^2 X(t)$
1	0,96970	0,20838	— 0,37467
2	0,93146	0,01238	— 0,09156
3	0,89284	— 0,04103	0,00788
4	0,85638	— 0,10043	— 0,05417
5	0,82313	— 0,06863	0,10866
6	0,78808	— 0,21277	— 0,03990
7	0,75893	— 0,29691	— 0,18501
8	0,74090	— 0,09975	0,08852
9	0,72915	— 0,03863	0,01048
10	0,72052	0,00810	— 0,09249
11	0,71222	0,19574	0,10445
12	0,69795	0,22464	0,07822
13	0,67399	0,12960	0,01843
14	0,64442	0,00536	— 0,04874
15	0,61521	— 0,03893	— 0,01971
16	0,58701	— 0,05421	0,07195
17	0,56243	— 0,17941	— 0,05828
18	0,54334	— 0,20631	— 0,09785
19	0,53111	— 0,08091	0,04205
20	0,52039	— 0,04145	0,00262
21	0,51509	0,00491	0,05054
22	0,50904	— 0,03033	— 0,45491
23	0,50543	0,18367	0,01734
24	0,49396	0,36597	0,26304
25	0,46820	0,13578	— 0,03218
26	0,43701	— 0,04271	— 0,06093
27	0,40740	— 0,12859	— 0,06646
28	0,38480	— 0,10278	0,01948
29	0,36427	— 0,10511	0,08636
30	0,34465	— 0,24290	— 0,17840
31	0,33157	— 0,11670	0,05271
32	0,32248	— 0,07473	0,00971
33	0,31858	— 0,04054	— 0,05327
34	0,31663	0,07481	0,04535
35	0,31264	0,11905	— 0,06534
36	0,30835	0,26866	0,15349
37	0,29276	0,17451	0,05654
38	0,27048	— 0,02116	— 0,16864

Más seguras serán las observaciones que se hagan sobre los resultados obtenidos de la función de autocorrelación estimada para la serie  $\nabla X(t)$ . En ella, como se desprende de su gráfico, la componente general autorregresiva ha desaparecido prácticamente, resaltándose, sin embargo, las componentes cíclicas correspondientes a amplitudes 12, 24 y 36. De todas maneras, ligeramente por encima del nivel de significatividad  $-\rho(\tau) \geq 0,1575$ — o con valores muy próximos al mínimo, aparecen puntos correspondientes a  $\tau = 11$

GRÁFICO 4. — *Correlograma estimado de la serie  $X(t)$* GRÁFICO 5. — *Correlograma estimado de la serie  $\nabla X(t)$* 

y 13,  $\tau = 23$  y 25,  $\tau = 35$  y 37 que indican el natural origen autocorrelacionado de la serie. Los valores negativos que aparecen carecen de capacidad interpretativa, ya que son el resultado lógico que se deriva de la forma en que ha sido obtenida la serie.

GRÁFICO 6. — *Correlograma estimado de la serie  $\nabla^2 X(t)$* 

El gráfico estimado para la serie a las segundas diferencias carecen de interés por presentar el comportamiento típico de una serie aleatoria: todos los valores obtenidos son significativos, salvo para el correspondiente a  $\tau = 24$  que no lo es, por otra parte, de una forma notable. No presenta, pues, capacidad interpretativa.

Dado que las observaciones que se hagan con respecto a la función de autocorrelación deberán referirse a su conjunto y no a valores aislados, se hace necesario el estudio de la serie en el campo de las frecuencias, es decir, el análisis espectral, que puede ser considerado como un instrumento complementario del análisis de la función de autocorrelación ya que, en primer lugar, la base en él y en segundo lugar porque la información que de él se deriva servirá para complementar la obtenida a través de la función de autocorrelación.

Para estimar la función de densidad espectral del proceso (que como se sabe, es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación) se utiliza la expresión

$$\bar{g}_M(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left[ \bar{\gamma}(0) + 2 \sum_{\tau=1}^M b_M(\tau) \cdot \bar{\gamma}(\tau) \cos \tau\lambda \right]$$

Tomando como ventana de intervalo la calculada por Tuckey que —siguiendo a Box-Jenkins— es la de mayor uso.

Los valores que con estos criterios se obtienen se encuentran resumidos en los cuadros 6, 7 y 8 y en el gráfico 7.

En los resultados obtenidos para la serie original, la mayor parte de la varianza es debida a bajas frecuencias (altos períodos) y a la frecuencia 1,570 que se corresponde con un período cuatrimestral. El primer valor se debe claramente a la fuerte componente tendencia-período que la serie presenta; en

CUADRO 6. — *Densidad espectral estimada para la serie  $X(t)$*

	Frecuencia angular	Período	Densidad espectral
1	0,087	72,000	4,420
2	0,174	36,000	0,409
3	0,261	24,000	0,318
4	0,349	18,000	0,335
5	0,436	14,400	— 0,077
6	0,523	12,000	0,430
7	0,610	10,285	— 0,245
8	0,698	9,000	0,343
9	0,785	8,000	— 0,262
10	0,872	7,200	0,348
11	0,959	6,545	— 0,263
12	1,047	6,000	0,403
13	1,134	5,538	— 0,177
14	1,221	5,142	0,337
15	1,308	4,800	0,014
16	1,396	4,500	0,375
17	1,483	4,235	2,057
18	1,570	4,000	12,193
19	1,650	3,789	2,049
20	1,745	3,600	0,376
21	1,832	3,428	— 0,005
22	1,919	3,272	0,337
23	2,007	3,130	— 0,202
24	2,094	3,000	0,383
25	2,181	2,880	— 0,289
26	2,268	2,769	0,340
27	2,356	2,666	— 0,300
28	2,443	2,571	0,345
29	2,530	2,482	— 0,307
30	2,617	2,400	0,356
31	2,705	2,322	— 0,302
32	2,792	2,250	0,339
33	2,879	2,181	— 0,309
34	2,967	2,117	0,343
35	3,054	2,057	— 0,312
36	3,141	2,000	0,346

CUADRO 7. — *Densidad espectral estimada para la serie  $\nabla X(t)$* 

	Frecuencia angular	Período	Densidad espectral
1	0,087	72,000	0,144
2	0,174	36,000	0,721
3	0,261	24,000	0,477
4	0,349	18,000	0,651
5	0,436	14,400	0,535
6	0,523	12,000	5,660
7	0,610	10,295	0,380
8	0,698	9,000	0,844
9	0,785	8,000	0,448
10	0,872	7,200	0,903
11	0,959	6,545	0,135
12	1,047	6,000	3,920
13	1,134	5,538	0,530
14	1,221	5,142	0,847
15	1,308	4,800	0,627
16	1,396	4,500	0,756
17	1,483	4,235	0,080
18	1,570	4,000	2,970
19	1,658	3,789	0,038
20	1,743	3,600	0,814
21	1,832	3,428	0,271
22	1,919	3,272	0,661
23	2,007	3,130	0,295
24	2,094	3,000	3,925
25	2,181	2,880	0,098
26	2,268	2,769	0,790
27	2,356	2,666	0,217
28	2,443	2,571	0,849
29	2,530	2,482	— 0,146
30	2,617	2,400	2,185
31	2,705	2,322	0,289
32	2,792	2,250	0,856
33	2,879	2,181	0,421
34	2,967	2,117	0,849
35	3,054	2,057	— 0,026
36	3,141	2,000	3,112

efecto, al aplicar el filtro lineal, la componente de bajas frecuencias prácticamente desaparece, lo que parece confirmar de una manera definitiva la presencia de una tendencia de fondo de carácter autorregresivo de primer orden —es decir, lineal—. Quizás una ulterior confirmación de esto sea la que se derive del análisis en la serie de segundas diferencias, ya que en él continúa sin aparecer ningún valor notable para las bajas frecuencias.

Respecto al valor que el espectro toma para la frecuencia 1,570 en la

serie original, nada se puede decir ya que la serie, como sabemos, no es estacionaria.

Una vez aplicado el filtro, se observa que surgen «picos» en los valores 0,523, 1,047 y 2,094, que corresponden a períodos de 12, 6 y 3 meses y algo menos marcadas aparecen ciclidades bimensuales y cuatrimestrales.

El análisis del espectro de la serie resultante de aplicar un filtro de segundo orden carece de interés, dado que el correlograma era no significativo.

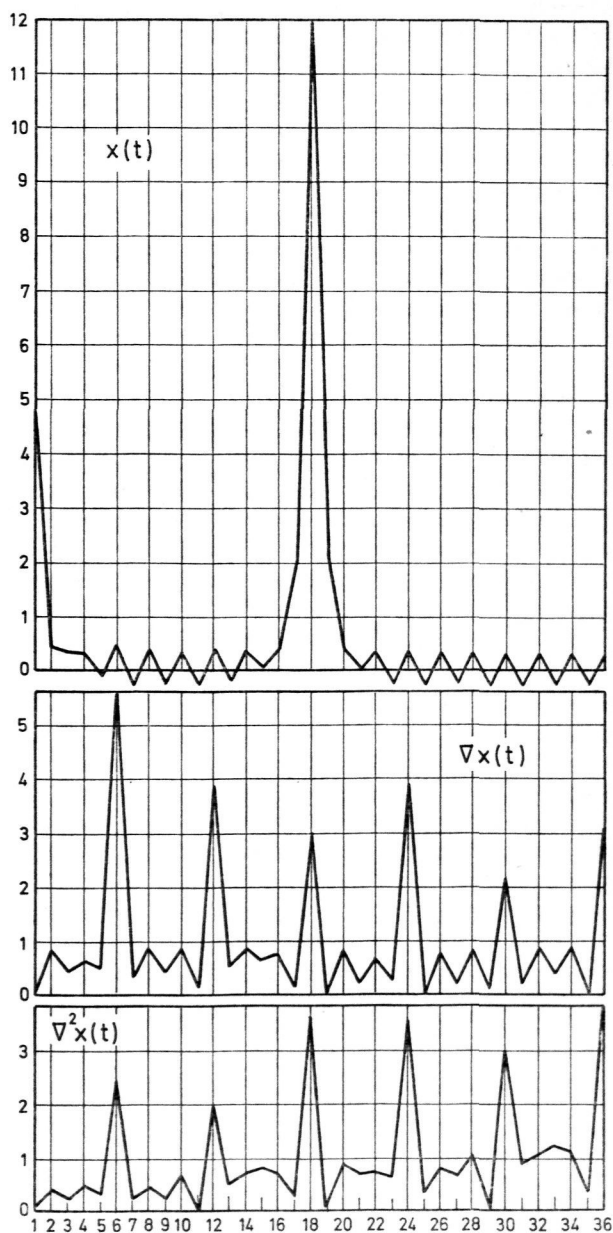
Resumiendo lo obtenido en esta fase del estudio y confrontando con los

CUADRO 8. — *Densidad espectral estimada para la serie  $\nabla^2 X(t)$*

	Frecuencia angular	Período	Densidad espectral
1	0,087	72,000	0,098
2	0,174	36,000	0,423
3	0,261	24,000	0,297
4	0,349	18,000	0,464
5	0,436	14,400	0,311
6	0,523	12,000	2,459
7	0,610	10,285	0,288
8	0,698	9,000	0,458
9	0,785	8,000	0,333
10	0,872	7,200	0,631
11	0,959	6,545	— 0,063
12	1,047	6,000	1,969
13	1,134	5,538	0,582
14	1,221	5,142	0,790
15	1,308	4,800	0,844
16	1,396	4,500	0,705
17	1,483	4,235	0,285
18	1,570	4,000	3,784
19	1,658	3,789	0,199
20	1,745	3,600	0,857
21	1,832	3,428	0,709
22	1,919	3,272	0,753
23	2,007	3,130	0,618
24	2,094	3,000	3,597
25	2,181	2,880	0,396
26	2,268	2,769	0,823
27	2,356	2,666	0,693
28	2,443	2,571	0,996
29	2,530	2,482	0,044
30	2,617	2,400	3,107
31	2,705	2,322	0,889
32	2,792	2,250	1,078
33	2,879	2,181	1,256
34	2,967	2,117	1,139
35	3,054	2,057	0,386
36	3,141	2,000	4,119



GRÁFICO 7.— *Densidad espectral estimada*



resultados de la anterior, se pueden deducir las siguientes conclusiones que serán más o menos definitivas.

1) La serie está, en su conjunto, gobernada por una tendencia de tipo lineal que explica la mayor parte de la varianza residua (la cuantificación de esta conclusión podrá ser llevada a cabo únicamente cuando se haya determinado el modelo interpretativo).

2) Existe —como era de esperar— una componente estacionaria de período anual que, naturalmente, repercute en los múltiplos y submúltiplos (el análisis del correlograma de  $\tau$  iguales a 12, 24 y 36 y el análisis espectral presenta «picos» para valores correspondientes a 12, 6 y 3 meses).

3) El análisis espectral denota la presencia de un ciclo más atenuado de período cuatrimestral, posiblemente debido a cambios estacionales.

4) Los mecanismos de ajuste de mercado a corto plazo se manifiestan de una manera muy atenuada y con ciclos bimensuales, como indica el análisis espectral.

Además de estas conclusiones, con objeto de ir centrando el posible modelo interpretativo de la serie, se ha conseguido la siguiente información:

1) Es muy posible que el valor de  $d$  en el modelo  $ARIMA(pdq)$  sea 0 o 1, siendo el primer caso de esperar un coeficiente autorregresivo de primer orden muy próximo a la unidad. En cualquier caso difícilmente  $d$  supera el valor 2 y a este nivel reduciremos el campo de análisis.

2) Alguna componente autorregresiva estará, sin duda, presente en el modelo, aunque no es de esperar que alcance valores muy altos.

3) Dado que se ha aislado una componente autorregresiva de carácter anual y que existe una tendencia de fondo lineal, el modelo  $ARIMA(12, 1, 0)$  será estudiado con detalle.

4) Es de esperar que en alguna componente a medio nivel se presente ya que los valores de los períodos bajos en el espectro son, si bien no muy altos, sí distintos de cero.

Con esta información previa se intentará proceder a la determinación del modelo lineal autorregresivo integrado a media móvil — $ARIMA(pdq)$ — que sirve para representar el proceso estocástico que ha generado la serie histórica de los precios al por mayor de productos agrícolas durante el período comprendido entre enero de 1959 y noviembre de 1971.

Los principales resultados obtenidos en la estimación del modelo se encuentran recogidas en el cuadro 9. Dicho cuadro muestra los valores de las distintas componentes del modelo y la varianza residua obtenida.<sup>37</sup> Observando

37. Se han omitido aquellos modelos que daban un valor alto para la varianza. Al contrario —y únicamente con valor comparativo— se han incluido modelos que han resultado no ser convergentes (no evolutivos) o con valores muy altos de la varianza residua.

En dicho cuadro se ha omitido el modelo  $ARIMA(12,1,0)$  por dar una varianza igual a 91,207 claramente superior al valor mínimo. De todos modos, y dado que antes parecía un resultado posible, más adelante se ha tomado en consideración.

El análisis se ha realizado también para distintos modelos con  $d=2$ , no siendo los resultados obtenidos satisfactorios, como por otra parte, era de esperar.

CUADRO 9. — Valores estimados para el modelo  $ARIMA(pdq)$ 

P	D	Q	Varianza residua	P	D	Q	Varianza residua
1	0	0	53,961	1	1	0	85,816
1	0	1	51,506	1	1	1	71,320
1	0	2	51,562	1	1	2	63,751
1	0	3	51,468	1	1	3	64,559
1	0	4	50,997	1	1	4	—
2	0	0	1.532,788	2	1	0	84,274
2	0	1	—	2	1	1	48,241
2	0	2	—	2	1	2	51,942
2	0	3	—	2	1	3	53,374
2	0	4	—	2	1	4	—
3	0	0	1.177,199	3	1	0	83,326
3	0	1	—	3	1	1	51,556
3	0	2	—	3	1	2	54,213
3	0	3	—	3	1	3	56,313
3	0	4	—	3	1	4	—
4	0	0	1.116,069	4	1	0	85,585
4	0	1	—	4	1	1	51,771
4	0	2	—	4	1	2	55,938
4	0	3	—	4	1	3	58,474
4	0	4	—	4	1	4	—

dicho cuadro resulta que, efectivamente, el mínimo se obtiene para un modelo con  $d = 1$  —el  $ARIMA(2,1,1)$ — y también se deduce que en dicho modelo la componente  $d$  es de peso fundamental, ya que también los modelos  $ARIMA(3,1,1)$  y  $(4,1,1)$  presentan una notable disminución en la varianza residua.

Pero también la serie de modelos  $ARIMA(1,0,q)$  presentan valores muy bajos en la varianza. Para el valor  $q = 4$  estos modelos alcanzan el valor mínimo (el correspondiente a  $q = 5$  resulta ser no convergente).

De entre todos ellos parece, pues, lógico tomar los modelos  $ARIMA(2,1,1)$  con una varianza residua  $\sigma^2 = 48,211$ , que equivale a un 3,82 por ciento de la varianza original, y  $ARIMA(1,0,4)$  con varianza  $\sigma^2 = 50,997$ , igual a un 4,03 por ciento de la original.

Dichos modelos presentan las siguientes características estructurales:

#### MODELO I. — $ARIMA(2,1,1)$

Parte autorregresiva . . . . .	$\Phi_1 = 0,215$
	$\Phi_2 = 0,032$
Varianza residua . . . . .	84,27
Parte a media móvil . . . . .	$\theta_1 = 0,864$
Varianza residua total . . . . .	0,864

Con estas características es posible su formulación analítica del siguiente modo

$$\nabla(\bar{X}_t - 0,215 \bar{X}_{t-1} + 0,032 \bar{X}_{t-2}) = a_t - 0,864 a_{t-1}$$

# MODELO II. — *ARIMA*(1,0,4)

Parte autorregresiva . . . . .	$\Phi_1 = 0,969$
Varianza residua . . . . .	53,96
Parte a media móvil . . . . .	$\theta_1 = -0,214$
	$\theta_2 = -0,019$
	$\theta_3 = 0,020$
	$\theta_4 = 0,104$
Varianza residua total . . . . .	50,99

Al igual que el modelo anterior, su expresión analítica puede ser formulada de la siguiente forma

$$\bar{X}_t - 0,969 \bar{X}_{t-1} = a_t + 0,214 a_{t-1} + 0,019 a_{t-2} - 0,020 a_{t-3} - 0,106 a_{t-4}$$

Tanto la expresión calculada para el modelo *ARIMA*(2,1,1), como la correspondiente al *ARIMA*(1,0,4) son de muy difícil interpretación, dada su complicada estructura analítica. Esta dificultad puede ser fácilmente subsanada recordando que todo modelo de este tipo puede ser transformado en un *AR*( $\infty$ ) mediante la aplicación directa de las propiedades de invertibilidad. En efecto, el modelo *ARIMA*(2,1,1) puede ser formulado, en general, de la siguiente forma

$$(1 - B)(1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2) \bar{X}_t = (1 - \theta_1 B) a_t$$

Al cumplirse la condición de invertibilidad, la expresión anterior puede ser escrita como

$$(1 - \theta_1 B)^{-1} (1 - B)(1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2) \bar{X}_t = a_t$$

Y desarrollando en serie la expresión

$$(1 - \theta_1 B)^{-1} = \sum_{K=0}^{\infty} (\theta_1 B)^K$$

resulta que se puede escribir

$$\sum_{K=0}^{\infty} (\theta_1 B)^K (1 - B)(1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2) \bar{X}_t = a_t$$

Operando en esta última fórmula se tiene

$$\left[ \sum_{K=0}^{\infty} \theta_1^K [B^K - (1 - \Phi_1) B^{K+1} + (\Phi_1 - \Phi_2) B^{K+2} + \Phi_2 B^{K+3}] \right] \bar{X}_t = a_t$$

Si consideramos la expresión

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\pi_j B^j) \bar{X}_t = a_t$$

Se trata de determinar por identificación los diversos valores de  $\pi_j$ , es decir, haciendo

$$\sum \theta_1^K [B^K - (1 - \Phi_1) B^{K+1} + (\Phi_1 - \Phi_2) B^{K+2} + \Phi_2 B^{K+3}] = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B_j$$

Y dando valores 0, 1, 2, ..., a las variables  $K$  y  $j$  se obtienen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 1 \\ \pi_1 &= \theta_1 (1 + \Phi_1) \\ \pi_2 &= \theta_1^2 - (1 + \Phi_1) \theta_1 + (\Phi_1 - \Phi_2) \\ \pi_3 &= \theta_1^3 - (1 + \Phi_1) \theta_1^2 + (\Phi_1 - \Phi_2) \theta_1 + \Phi_2 \\ \pi_3 &= \theta_1^4 - (1 + \Phi_1) \theta_1^3 + (\Phi_1 - \Phi_2) \theta_1^2 + \Phi_2 \theta_1 = \theta_1 \pi_3 \end{aligned}$$

como se explicita a continuación:

Para la variable  $K$

$$\begin{aligned} K=0 & 1 - (1 + \Phi_1) B + (\Phi_1 - \Phi_2) B^2 + \Phi_2 B^3 \\ K=1 & \Phi_1 B - (1 + \Phi_1) \theta_1 B^2 + (\Phi_1 - \Phi_2) \theta_1 B^3 + \Phi_2 \theta_1 B^4 \\ K=2 & \theta_1^2 B^2 - \theta_1^2 (1 + \Phi_1) B^3 + \theta_1^2 (\Phi_1 - \Phi_2) B^4 + \theta_1^2 \Phi_2 B^5 \\ K=3 & \theta_1^3 B^3 - \theta_1^3 (1 + \Phi_1) B^4 + \theta_1^3 (\Phi_1 - \Phi_2) B^5 + \theta_1^3 \Phi_2 B^6 \\ K=4 & \theta_1^4 B^4 - \theta_1^4 (1 + \Phi_1) B^5 + \theta_1^4 (\Phi_1 - \Phi_2) B^6 + \theta_1^4 \Phi_2 B^7 \end{aligned}$$

Igualmente dando valores a la variable  $j$  resulta

$$\begin{aligned} j=0 & \pi_0 \\ j=1 & + \pi_1 B \\ j=2 & + \pi_2 B^2 \\ j=3 & + \pi_3 B^3 \\ j=4 & + \pi_4 B^4 \end{aligned}$$

Identificando para los distintos valores de  $B$  se tiene a partir del 3.º grado

$$\pi_j = \theta_1^{j-3} \cdot \pi_3$$

Esto nos permite determinar los valores de  $\pi_j$ . Una vez fijado el grado de retardo, que se hará en base a los pesos relativos que vaya tomando  $\pi$  a medida que descendemos en el tiempo, el modelo se puede expresar de la forma

$$X_t = \sum_{j=1}^{\alpha} \pi_j \bar{X}_{t-j} + a_t$$

Pero, dado que  $\bar{X}_t = X_t - \mu$ , independientemente del momento en que se considere, resulta que

$$X_t = \mu \left( 1 - \sum_{j=1}^{\alpha} \pi_j \right) + \sum_{j=1}^{\alpha} \pi_j X_{t-j} + a_j$$

que, evidentemente, es de una mayor facilidad interpretativa.

En el cuadro 10 se incluyen los índices que permitirán una elección definitiva del modelo; también se encuentran los valores correspondientes al modelo *ARIMA*(12,1,0) ya que, como más arriba se había indicado, su estructura refleja las características fundamentales que indicaban los análisis de la función de autocorrelación y densidad espectral.

CUADRO 10. — *Índices de los diversos modelos estudiados*  
(Varianza de la serie original  $\sigma^2 = 1264,9$ )

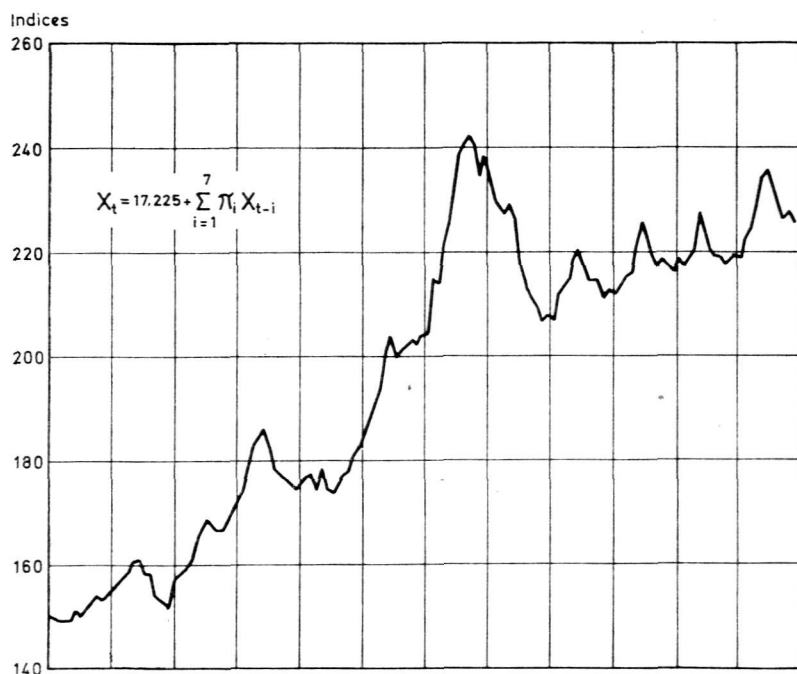
Modelo	Varianza residuo	I.D.M.	Suma desviaciones
ARIMA(2,1,1)	48,246	0,289	427,94
ARIMA(1,0,4)	50,997	0,182	96,98
ARIMA(12,1,0)	91,027	0,217	155,09

De su observación resulta que, si bien la reducción de la varianza es superior mediante la estructura *ARIMA*(2,1,1), la diferencia con respecto al modelo *ARIMA*(1,0,4) es mínima —recuérdese que el primero disminuye en un 95,18 por ciento la varianza total, mientras el segundo lo hace en un 95,97 por ciento—, los índices de ajuste son netamente favorables al segundo.

También es posible descartar definitivamente el modelo *ARIMA*(12,1,0) ya que todos los índices son peores que los obtenidos con los dos modelos anteriores.

Una posterior confirmación de la superioridad en el ajuste mediante el modelo obtenido se deduce de los gráficos 8 y 9: en ellos se reproducen los valores obtenidos aplicando respectivamente los *ARIMA*(2,1,1) y *ARIMA*(1,0,4).

GRÁFICO 8.—Precios al por mayor de productos agrícolas obtenidos aplicando el modelo ARIMA (3.1.1.)



Comparando dichos gráficos con el correspondiente a la serie de los valores observados, se concluye que el segundo modelo puede ser considerado como más adaptado a la serie histórica estudiada y, por tanto, como representativo del proceso estocástico que ha generado a la serie de precios de productos agrícolas.

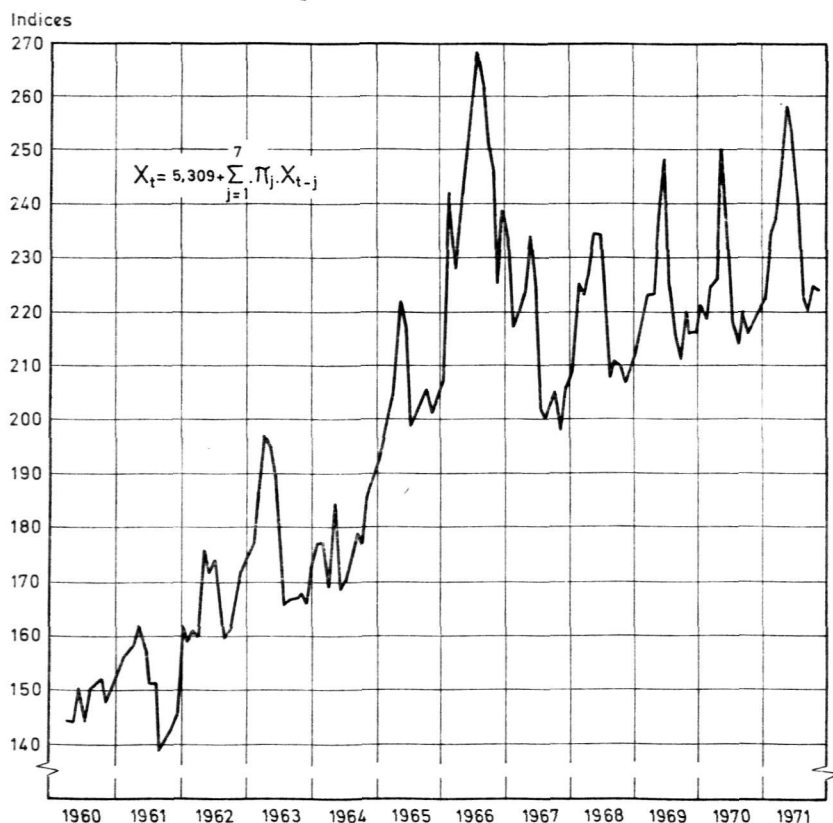
En resumen, dicho modelo es

$$X_t = 5,309 + \sum_{i=1}^7 \pi_i X_{t-i} + a_t$$

en donde

$\pi_1 = 1,184$	$\pi_6 = -0,052$
$\pi_2 = -0,234$	$\pi_7 = 0,007$
$\pi_3 = 0,006$	$\sum_{j=1}^7 \pi_j = 0,970$
$\pi_4 = -0,078$	
$\pi_5 = 0,137$	

GRÁFICO 9.— *Precios al por mayor de productos agrícolas obtenidos aplicando el modelo ARIMA (1.0.4.)*



## V. CONCLUSIONES

Del análisis efectuado en las páginas anteriores pueden destacarse, a modo de conclusión, los siguientes aspectos:

a) El estudio de las distintas componentes de la serie ofrece los siguientes resultados definitivos:

b) De lo anterior cabe deducir que los precios agrícolas en la fase de mercado al por mayor no presentan ningún tipo de ciclicidad superior al anual, siendo esta última la que aparece con mayor intensidad, quizá transmitiendo su influencia a subdivisiones semestrales, cuatrimestrales y trimestrales. Son de señalar, aunque no sean muy importantes, las fluctuaciones de breve período de una amplitud comprendida entre los dos y dos meses y medio.



CUADRO 11. — Serie estimada para los precios al por mayor  
de productos agrícolas obtenida aplicando el modelo ARIMA(1,0,4)

$$X_t = 5,309_t \sum_{j=1}^4 \pi_j \cdot X_{t-j}$$

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1959												
1960				144,3	144,2	150,4	144,3	150,5	150,8	152,5	147,7	151,2
1961	153,0	155,5	156,9	157,8	162,1	156,9	151,3	150,8	139,0	141,1	142,4	144,8
1962	162,3	159,2	160,6	160,4	175,8	172,5	173,8	164,7	160,2	161,0	168,3	171,9
1963	174,6	177,0	187,2	196,5	195,1	190,4	173,5	166,0	166,7	166,9	167,4	165,9
1966	206,8	242,1	228,3	239,8	248,0	259,8	268,4	173,4	178,3	176,9	185,8	189,2
1965	192,0	196,7	201,4	204,9	221,9	217,0	198,5	200,9	203,1	205,0	201,5	204,0
1966	206,8	242,1	228,3	239,8	248,0	259,8	268,4	262,1	252,2	246,0	225,0	238,9
1967	233,2	216,7	220,3	223,5	233,5	224,4	202,0	199,7	203,3	205,3	198,0	206,5
1968	208,9	225,4	222,8	226,7	233,9	234,1	219,4	208,0	211,5	210,4	207,1	210,5
1969	212,0	218,2	222,9	223,0	237,8	248,0	225,5	215,7	211,3	220,5	215,7	216,0
1970	221,2	218,9	225,0	226,2	250,5	232,0	218,0	213,8	220,2	215,6	218,3	220,0
1971	222,4	235,4	237,1	244,9	258,3	251,2	240,4	223,0	220,2	225,1	224,5	

Serie estudiada	F. de autocorrelación	F. de D.espectral <sup>38</sup>
$X(t)$	Fuerte tendencia aparentemente lineal Notable varianza total Evolutiva	
$\nabla X(t)$	Desaparece tendencia	> 12 . . . . . --
		12 . . . . . 5,65
	Ciclicidades aparentemente anuales	6 . . . . . 3,92
		4 . . . . . 2,97
		3 . . . . . 3,64
		< 3 . . . . . ligera a 2 y 2,4 meses
$\nabla^2 X(t)$	No significativa	

c) En el gráfico 9 y cuadro 11 se recogen los valores obtenidos tras la aplicación del modelo que se ha seleccionado como más idónea —un *ARIMA(1,0,4)*—. De su observación y comparación con los datos originales se desprende la bondad del ajuste obtenido.

Es evidente que el análisis aquí efectuado cobra todo su valor cuando se estudian comparativamente los resultados obtenidos para dos o más series ligadas de algún modo entre sí —por ejemplo, analizando series de precios obtenidas en distintos escalones del proceso comercial o, también, series de precios correspondientes a distintos tipos de productos (agrícolas e industriales) en una misma fase del mercado—. Éste es trabajo que se intentará realizar en el próximo futuro.

*Departamento de Economía Agraria.*  
*Consejo Superior de Investigaciones Científicas.*

#### BIBLIOGRAFÍA

- ANDERSON, Th. W.: *The Statistical analysis of time series*, J. Willy, Nueva York, 1971.  
 BARBIERI, G.: «Sulla metodologia statistica della serie temporali», *Statistica*, 1960.  
 BARBIERI, B.: *Il metodo statistico nello studio dei fenomeni osservazionali*, Boringhieri, Turín, 1962.  
 BARTLETT, M. S.: «Periodogram analysis and continuous spectra», *Biometrika*.  
 — «On the theoretical specification and sampling properties of autocorrelated time series», *Journal Royal Stat. Soc.*, 1956.  
 — *An introduction to stochastic processes*, Cambridge University Press, 1961.

38. Los valores 12, 12,6,4,..., son, en meses, aquellos en que se observa una acumulación significativa de la varianza.

- BOX, G. E., y JENKINS, G. M.: *Time series analysis: Forecasting and Control*, Holden Day, 1970.
- BRAMBILLA, F.: *Analisi spettrale delle serie temporali*, Univ. Commerciale L. Bocconi, Milán, 1966.
- CAMBELL, G. A., y FOSTER, R. M.: *Fourier Integral for practical applications*, Van Nostand, 1952.
- CARLUCCI, F.: *Elementi di Analisi Spettrale*, Istituto di Calcolo delle probabilità, Roma, 1971.
- *Introduzione ai modelli Stocastici rappresentativi ed alla previsione*, Istituto di Calcolo delle probabilità, Roma, 1971.
- DOBB, J. L.: *Stochastic processes*, J. Wiley, 1953.
- FISHMAN, G. S.: *Spectral methods in Econometric*, Harvard University Press, 1969.
- GALLO, F.: *Introduzione alle equazioni alle differenze finite*, Facoltà di Scienze Statistiche, 1971.
- GRANGER, C. W. J., y HATANAKA, N.: *Spectral Analysis of economic time series*, P. University Press, Princeton, 1964. Edición francesa en Dunod, 1969.
- *Modelos de series temporales y su interpretación*, Meeting Europeo de la Econometrie Society, Budapest, octubre 1972.
- HAROLD, T. D.: *The Analysis of Economic time series*, Cowles Commission for Research in Economics, Univ. of Chicago, 1941.
- I. N. E.: Boletines Estadísticos Mensuales (1959-1971).
- I. N. E.: *Precios al por mayor: Nuevo sistema de números índices*, Madrid, 1960.
- JENKINS, G. M., y WATT, T.: *Spectral Analysis and its applications*, Holden Day, 1969.
- LALOIRE, G.: *Méthodes du traitement des chroniques*, Dunod, 1972.
- MALINVAUD, E.: *Métodos estadísticos en Econometría*, Ariel.
- *Serial Correlation in Econometric Analysis*, Seminario tenido en el Centro de Ec. Agr. de Portici, mayo 1969.
- MINEO, A.: «Sulla scelta del grado di una funzione di regressione polinomiale nell'analisi delle serie storiche», *Statistica*, XXXI, julio-septiembre 1971, pp. 529-554.
- NAYLOR, T. H. WERTZ, K., y WONNACOTT, T. H.: «Spectral analysis of data generated by experimenty with econometric models», *Econometrica*, 37, 1969, pp. 333-352.
- PARZEN, E.: *Time series analysis papers*, Holden Day, San Francisco, 1967.
- «On asyntotically, efficient, consisten stimates of the spectral density function of a stationary time series», *Journal Royal Stat. Soc.*, Serie B, núm. 20, 1958.
- PICCOLO, D.: «Analisi statistica del prezzi all'ingrosso in Italia (1956-1971)», *Rassegna Economica*, 1972.
- «L'evoluzione dei prezzi al consumo in Italia», *Rassegna Economica*, 1973.
- *Appunti per un seminario sulle serie storiche (Manoscritto)*, Istituto di Economia Agraria, Portici, 1971.
- QUINET, E.: *Séries temporelles et décisions économiques*, Dunod, 1969.
- SÁNCHEZ-CRESPO, J. L.: *Estadística descriptiva*, I. N. E., Madrid, 1961.
- Symposium sobre: «Spectral Approach to time series». Número especial del *Journal of the Royal Statistical Society*, Serie B, 1957.
- TICK, L. J.: *Some time series techniques useful in life sciencies*. Proc. IBM. Scientific Computing Symposium in Statistics, 1963.
- TUKEY, J. M.: «Discussion emphasizing the connection between analysis of varianz and spectral analysis», *Technometrics*, núm. 3, 1961.
- VAJANI, L.: *Serie Temporali: Moderni orientamenti*, I.S.C.O., Milán, 1963.
- YAMANE, T.: *Matemáticas para Economistas*, Ariel, 1965.